

Lampiran I

DAFTAR TERJEMAH

No	BAB	KUTIPAN	HAL	TERJEMAH
1	I	Shahih Sunan Ibnu Majah no. 223.	2	Mencari ilmu itu hukumnya wajib bagi muslimin dan muslimat
2	I	Al-Mujadalah Ayat 11	3	Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat

Lampiran II (Nilai Akhir Mata Kuliah Analisis Real Tahun Akademik 2018/2019)

Lokal A

No	KODE	NA	Indeks
1	A1	64,9	C
2	A2	75,5	B+
3	A3	69,2	C+
4	A4	73,4	B
5	A5	75,5	B+
6	A6	69,5	C+
7	A7	77,4	B+
8	A8	65,5	C+
9	A9	82,8	A
10	A10	83,6	A
11	A11	71,3	B
12	A12	60,7	C
13	A13	84,4	A
14	A14	78,9	B+
15	A15	83,8	A
16	A16	81,4	A
17	A17	82	A
18	A18	68,5	C+
19	A19	66,4	C+
20	A20	76,7	B+
21	A21	80,6	A
22	A22	64,9	C
23	A23	67,2	C+
24	A24	73,1	B
25	A25	79	B+

26	A26	71,6	B
27	A27	67,9	C+
28	A28	63,5	C
29	A29	86,6	A
30	A30	83,6	A
31	A31	68	C+
32	A32	71	B
33	A33	65,5	C+
34	A34	70,1	B
35	A35	64	C

Lokal B

No	KODE	NA	Indeks
1	B1	52,5	D
2	B2	61,3	C
3	B3	60	C
4	B4	60,2	C
5	B5	70,4	B
6	B6	70	B
7	B7	62,2	C
8	B8	60,6	C
9	B9	70,6	B
10	B10	51,5	D
11	B11	51,3	D
12	B12	60,2	C
13	B13	50,1	D
14	B14	60,9	C
15	B15	51,2	D
16	B16	51,5	D

17	B17	60,1	C
18	B18	72,7	B
19	B19	60	C
20	B20	60	C
21	B21	51,3	D
22	B22	63,2	C
23	B23	60	C
24	B24	80,1	A
25	B25	73,8	B
26	B26	60	C
27	B27	52,4	D
28	B28	60	C
29	B29	50,7	D
30	B30	55,2	D+
31	B31	70,4	B
32	B32	51	D
33	B33	51,4	D

Lokal C

No	KODE	NA	Indeks
1	C1	80,6	A
2	C2	73,8	B
3	C3	82,4	A
4	C4	67,1	C+
5	C5	74,2	B
6	C6	84,1	A
7	C7	84	A
8	C8	65,3	C+
9	C9	82,5	A

10	C10	81,8	A
11	C11	80,6	A
12	C12	80,9	A
13	C13	74,5	B
14	C14	82,6	A
15	C15	74,5	B
16	C16	75,4	B+
17	C17	73,9	B
18	C18	60,1	C
19	C19	75,5	B+
20	C20	-	-
21	C21	68,2	C+
22	C22	73,2	B
23	C23	67	C+
24	C24	81,1	A
25	C25	71,1	B
26	C26	67,6	C+
27	C27	74,5	B
28	C28	71,6	B
29	C29	70,1	B
30	C30	73,1	B
31	C31	74	B
32	C32	67	C+
33	C33	66,5	C+
34	C34	-	-
35	C35	71,3	B
36	C36	-	-
37	C37	65,5	C+

38	C38	62,2	C
----	-----	------	---

Lokal D

No	KODE	NA	Indeks
1	D1	52	D
2	D2	66	C+
3	D3	65,1	C+
4	D4	52	D
5	D5	53,2	D
6	D6	51	D
7	D7	60,1	C
8	D8	61,3	C
9	D9	80,5	A
10	D10	55,1	D+
11	D11	50,6	D
12	D12	83,3	A
13	D13	70,1	B
14	D14	60	C
15	D15	55,7	D+
16	D16	55,1	D+
17	D17	85,6	A
18	D18	63	C
19	D19	60,2	C
20	D20	52	D
21	D21	70,2	B
22	D22	60	C
23	D23	66,9	C+
24	D24	66,1	C+
25	D25	71,9	B

26	D26	86,2	A
27	D27	60,2	C
28	D28	72,6	B
29	D29	70,2	B
30	D30	67,2	C+
31	D31	67,8	C+
32	D32	60	C
33	D33	60,2	C
34	D34	51,3	D
35	D35	61,8	C
36	D36	51,3	D

Lampiran III (Instrument Tes Uji Validitas, Reabilitas dan Uji Hipotesis)

Soal Uji Kemampuan Literasi dan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi

1. Buktikan bahwa $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$
2. Buktikan bahwa $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$
3. Misalkan $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$ tunjukkan bahwa $\text{Sup } S_3 = 1$
4. Diberikan S subset tak kosong R yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S \}$

Lampiran IV (Kunci Jawaban dan Pedoman Penskoran Instrument Tes)

1. Tes uraian

Mata kuliah : Analisi Real

Semester : IV

Materi : Barisan dan Limit Barisan

Butir soal : Buktikan bahwa $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Pedoman Penskoran Analitik Kemampuan Literasi

Indikator	Kunci Jawaban	Skor
Menyajikan situasi matematis dengan menggunakan variabel yang tepat, simbol, diagram, dan model standar.	<p>Buktikan :</p> $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$ <p>penyelesaian :</p> <p>Artinya $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} \ni \left \frac{2n}{n+2} - 2 \right < \varepsilon, \forall n \geq K$</p>	1
Menerapkan fakta, aturan, algoritma, dan struktur matematika ketika menemukan solusi.	<p>Analisis Pendahuluan :</p> $\left \frac{2n}{n+2} - 2 \right = \left \frac{2n - 4 - 2n}{n+2} \right $	1
	$= \left \frac{-4}{n+2} \right $	1
	$= \frac{4}{n+2}$	1
	$< \frac{4}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon}, \forall n \in \mathbb{N}$	1
	<p>Pilih $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga $K(\varepsilon) > \frac{4}{\varepsilon}$</p>	1

Menjelaskan mengapa hasil atau kesimpulan matematika yang dibuat masuk akal ataupun tidak masuk akal, dalam kaitannya dengan konteks.	Bukti : Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, berdasarkan akibat 1. 4. 6 terdapat $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian hingga $0 < \frac{1}{K(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{4}$	1
	Selanjutnya jika $n > K(\varepsilon)$ diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$	1
	Akibatnya $\forall n \geq K(\varepsilon)$ sehingga berlaku	1
	$\left \frac{2n}{n+2} - 2 \right = \left \frac{2n - 4 - 2n}{n+2} \right $	1
	$= \left \frac{-4}{n+2} \right $	1
	$= \frac{4}{n+2}$	1
	$< \frac{4}{n} < \varepsilon$	1
	Jadi terbukti bahwa $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \in N \ni \left \frac{2n}{n+2} - 2 \right < \varepsilon$ atau $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$	1
Total Skor	13	

2. Tes uraian

Mata kuliah : Analisi Real

Semester : IV

Materi : Barisan dan Limit Barisan

Butir soal : Buktikan bahwa $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$ Pedoman Penskoran Analitik Kemampuan Literasi

Indikator	Kunci Jawaban	Skor
Menyajikan situasi matematis dengan menggunakan variabel yang tepat, simbol, diagram, dan model standar.	<p>Tentukan :</p> $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$ <p>penyelesaian :</p> <p>Artinya $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} \ni \left \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right < \varepsilon, \forall n \geq K$</p>	1
Menerapkan fakta, aturan, algoritma, dan struktur matematika ketika menemukan solusi.	<p>Analisis Pendahuluan :</p> $\left \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right = \left \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right $	1
	$= \left \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right $	1
	$= \left \frac{29}{4n+6} \right $	1
	$= \frac{29}{4n+6}$	1
	$< \frac{29}{4n}$	1

	$\left\langle \frac{29}{n} \right\rangle < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{29}{\varepsilon}$	1
	Pilih $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga $K(\varepsilon) > \frac{29}{\varepsilon}$	1
Menjelaskan mengapa hasil atau kesimpulan matematika yang dibuat masuk akal ataupun tidak masuk akal, dalam kaitannya dengan konteks.	Bukti : Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, berdasarkan akibat 1. 4. 6 terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $0 < \frac{1}{K(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{29}$	1
	Selanjutnya jika $n > K(\varepsilon)$ diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{29}$	1
	Akibatnya $\forall n \geq K(\varepsilon)$ sehingga berlaku $\left \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right = \left \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right $	1
	$= \left \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right $	1
	$= \left \frac{29}{4n+6} \right $	1
	$= \frac{29}{4n+6}$	1
	$< \frac{29}{4n}$	1
	$< \frac{29}{n} < \varepsilon$	1
	Jadi terbukti bahwa $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni$ $\left \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right < \varepsilon \text{ atau } = \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$	1
	Total Skor	17

3. Tes uraian

Mata kuliah : Analisi Real

Semester : IV

Materi : Suprimum dan Imprimum

Butir soal : Misalkan $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$ tunjukkan bahwa $\text{Sup } S_3 = 1$ Pedoman Penskoran Analitik Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi

Indikator	Kunci Jawaban	Skor
Mengidentifikasi atau merumuskan pertanyaan	<p>Diketahui :</p> $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$ <p>Akan dibuktikan $\text{Sup } S_3 = 1$.</p> <p>Penyelesaian :</p>	1
Menerima atau menolak suatu pernyataan berdasarkan kriteria yang telah ditetapkan.	<p>Pembuktian :</p> <p>Berdasarkan teorema 2.1.8, kita ketahui bahwa $1 > 0$. Dan untuk setiap $n \in N$, berlaku $n > 0$</p>	1
	<p>$1 > 0, 1 \in N, n > 0$ untuk setiap $n \in N$ maka $0 < 1 \leq n$.</p>	1
	<p>Sehingga $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in N$</p>	1
Membuat generalisasi suatu ide atau cara pandang terhadap sesuatu	<ul style="list-style-type: none"> $\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_3$, artinya 1 adalah batas atas dari S_3. 	1
	<p>Untuk setiap $\varepsilon > 0$ kita tahu bahwa mungkin saja $1 < \varepsilon$ atau $0 < \varepsilon < 1$.</p>	1
	<p>Misalkan $\varepsilon > 0$, artinya $1 - \varepsilon < 1 = \frac{1}{1} =$ $S_\varepsilon = S_3$.</p>	1

	Jadi $\exists S_\varepsilon = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \varepsilon < S_\varepsilon$.	1
	1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\varepsilon > 0, \exists S_\varepsilon = \frac{1}{1} \in S_\varepsilon$	1
	sehingga $1 - \varepsilon < S_\varepsilon$ maka menurut lemma 2.3.4. $\sup S_3 = 1$	1
Membuat generalisasi suatu ide atau cara pandang terhadap sesuatu	• $\frac{1}{n} > 0, \forall \frac{1}{n} \in S_3$	1
	Misalkan 0 bukan batas bawah dari S_3 , artinya $\exists s \in S_3$ sehingga $s < 0$.	1
	$s < 0$ artinya s bukan anggota S_3 .	1
	Kontradiksi dengan $s \in S_3$.	1
	Jadi pengandaian 0 bukan batas bawah dari S_3 salah.	1
	Jadi 0 batas bawah dari S_3	1
Total Skor		16

4. Tes uraian

Mata kuliah : Analisi Real

Semester : IV

Materi : Suprimum dan Imprimum

Butir soal : Diberikan S subset tak kosong R yang terbatas ke bawah.Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$ Pedoman Penskoran Analitik Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi

Indikator	Kunci Jawaban	Skor
Mengidentifikasi atau merumuskan pertanyaan	<p>Diketahui :</p> <p>Diberikan S subset tak kosong R yang terbatas ke bawah.</p> <p>Buktikan bahwa :</p> $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$ <p>Penyelesaian :</p>	1
Menerima atau menolak suatu pernyataan berdasarkan kriteria yang telah diteapkan.	<p>Misalkan $v = \inf S$</p> <p>$v = \inf S$ berarti :</p> <ul style="list-style-type: none"> i. v batas bawah S ii. Sebarang t batas bawah S berlaku $t \leq v$ 	2
Membuat generalisasi suatu ide atau cara pandang terhadap sesuatu	<p>Akan ditunjukkan :</p> $-v = \sup\{-s : s \in S\} = \sup S'$	1
	<p>Bukti :</p> <p>a. Akan ditunjukkan $-v$ batas atas S'</p>	1

	v batas bawah S , berarti $v \leq s, \forall s \in S$	1
	Karena $-1 < 0$ maka $-s \leq -v, \forall -s \in S'$, berarti $-v$ batas atas S'	1
	Jadi $-v$ batas atas S'	1
\Membuat generalisasi suatu ide atau cara pandang terhadap sesuatu	b. Misalkan w sebarang batas atas S' , akan dibuktikan $-v \leq w$	1
	w batas atas S' berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$.	1
	<i>karena</i> $-1 < 0$, maka $s \geq -w, \forall s \in S$,	1
	sehingga $-w$ batas bawah S .	1
	$-w$ sebarang batas bawah S dan	1
	$v = \inf S$ maka $-w \leq v$	1
	Akibatnya $-v \leq w$	1
	Dari (a) dan (b) diperoleh $-v = \sup S' \{-s: s \in S\}$ sehingga $v = -\sup\{-s: s \in S\}$.	1
Total Skor		16

Lampiran V (Tabel r)

df = (N-2)	Tingkat signifikansi untuk uji satu arah				
	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
	Tingkat signifikansi untuk uji dua arah				
	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.9877	0.9969	0.9995	0.9999	1.0000
2	0.9000	0.9500	0.9800	0.9900	0.9990
3	0.8054	0.8783	0.9343	0.9587	0.9911
4	0.7293	0.8114	0.8822	0.9172	0.9741
5	0.6694	0.7545	0.8329	0.8745	0.9509
6	0.6215	0.7067	0.7887	0.8343	0.9249
7	0.5822	0.6664	0.7498	0.7977	0.8983
8	0.5494	0.6319	0.7155	0.7646	0.8721
9	0.5214	0.6021	0.6851	0.7348	0.8470
10	0.4973	0.5760	0.6581	0.7079	0.8233
11	0.4762	0.5529	0.6339	0.6835	0.8010
12	0.4575	0.5324	0.6120	0.6614	0.7800
13	0.4409	0.5140	0.5923	0.6411	0.7604
14	0.4259	0.4973	0.5742	0.6226	0.7419
15	0.4124	0.4821	0.5577	0.6055	0.7247
16	0.4000	0.4683	0.5425	0.5897	0.7084
17	0.3887	0.4555	0.5285	0.5751	0.6932
18	0.3783	0.4438	0.5155	0.5614	0.6788
19	0.3687	0.4329	0.5034	0.5487	0.6652
20	0.3598	0.4227	0.4921	0.5368	0.6524
21	0.3515	0.4132	0.4815	0.5256	0.6402
22	0.3438	0.4044	0.4716	0.5151	0.6287
23	0.3365	0.3961	0.4622	0.5052	0.6178
24	0.3297	0.3882	0.4534	0.4958	0.6074
25	0.3233	0.3809	0.4451	0.4869	0.5974
26	0.3172	0.3739	0.4372	0.4785	0.5880
27	0.3115	0.3673	0.4297	0.4705	0.5790
28	0.3061	0.3610	0.4226	0.4629	0.5703
29	0.3009	0.3550	0.4158	0.4556	0.5620
30	0.2960	0.3494	0.4093	0.4487	0.5541
31	0.2913	0.3440	0.4032	0.4421	0.5465
32	0.2869	0.3388	0.3972	0.4357	0.5392
33	0.2826	0.3338	0.3916	0.4296	0.5322
34	0.2785	0.3291	0.3862	0.4238	0.5254
35	0.2746	0.3246	0.3810	0.4182	0.5189
36	0.2709	0.3202	0.3760	0.4128	0.5126
37	0.2673	0.3160	0.3712	0.4076	0.5066

Lampiran VI (Uji Validitas dan Uji Reabilitas)

1. Menggunakan SPSS 22.

a. Uji Validitas

Correlations

		Soal_1	Soal_2	Soal_3	Soal_4	Total
Soal_1	Pearson Correlation	1	,904**	,587**	,540**	,933**
	Sig. (2-tailed)		,000	,001	,003	,000
	N	28	28	28	28	28
Soal_2	Pearson Correlation	,904**	1	,650**	,397*	,889**
	Sig. (2-tailed)	,000		,000	,036	,000
	N	28	28	28	28	28
Soal_3	Pearson Correlation	,587**	,650**	1	-,103	,579**
	Sig. (2-tailed)	,001	,000		,603	,001
	N	28	28	28	28	28
Soal_4	Pearson Correlation	,540**	,397*	-,103	1	,708**
	Sig. (2-tailed)	,003	,036	,603		,000
	N	28	28	28	28	28
Total	Pearson Correlation	,933**	,889**	,579**	,708**	1
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,001	,000	
	N	28	28	28	28	28

b. Uji Reabilitas

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,665	4

2. Menggunakan Excel

a. Uji Validitas

Nomor	1	2	3	4	Total
1	11	15	16	15	57
2	10	15	10	16	51
3	9	15	10	16	50
4	10	15	10	16	51
5	10	15	10	16	51
6	12	16,5	10	16	54,5
7	10	15	10	16	51
8	10	11	10	16	47
9	10	15	10	16	51
10	10	15	15	15	55
11	10	15	16	15,5	56,5
12	9	15	16	1	41
13	10	15	10	16	51

14	10	11	10	16	47
15	10	16	16	1	43
16	12	15,5	10	16	53,5
17	10	15	16	16	57
18	10	15	10	16	51
19	10	14	10	16	50
20	10	14	10	14	48
21	10	15	10	15,5	50,5
22	10	16	9,5	15,5	51
23	10	15	10	16	51
24	10	15	10	16	51
25	10	15	16	1	42
26	10	15	10	15,5	50,5
27	10	14	10	15,5	49,5
28	0	0	0	0	0
r_{hitung}	0,932638	0,888926	0,579235	0,707725	
r_{tabel}	0,3882	0,3882	0,3882	0,3882	
V/T	Valid	Valid	Valid	Valid	

b. Uji Reabilitas

Nomor	1	2	3	4	Total
1	11	15	16	15	57
2	10	15	10	16	51
3	9	15	10	16	50
4	10	15	10	16	51
5	10	15	10	16	51
6	12	16,5	10	16	54,5
7	10	15	10	16	51
8	10	11	10	16	47
9	10	15	10	16	51
10	10	15	15	15	55
11	10	15	16	15,5	56,5
12	9	15	16	1	41
13	10	15	10	16	51
14	10	11	10	16	47
15	10	16	16	1	43
16	12	15,5	10	16	53,5
17	10	15	16	16	57
18	10	15	10	16	51
19	10	14	10	16	50
20	10	14	10	14	48
21	10	15	10	15,5	50,5
22	10	16	9,5	15,5	51
23	10	15	10	16	51
24	10	15	10	16	51
25	10	15	16	1	42
26	10	15	10	15,5	50,5
27	10	14	10	15,5	49,5
28	0	0	0	0	0
n	4				
$\left(\frac{n}{n-1}\right)$	1,33				
Varians	4,05	9,16	11,41	28,72	
$\sum \sigma_i^2$	53,33				
σ_t^2					106,4048

$\frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma_t^2}$	0,50	
$1 - \frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma_t^2}$	0,50	
r_{11}	0,66	
r_{tabel}	0,3882	

Karena $r_{11} > r_{tabel}$ maka soal tersebut reliabel.

Lampiran VII (Jawaban Sampel Penelitian)

Nama: Bahrudin Ahmad
 NIM: 180101040170
 Mata Kuliah: Analisis Real
 Waktu : A 2018

1. Misalkan $S_3 = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ Tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$
2. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$
3. Buktikan limit berikut ini
 - a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$
 - b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Jawab

1. Misalkan $S_3 = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$
 Buktikan
 Tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$
 $1 > 0$ Teorema 1.1.10 b
 $\forall n, n \in \mathbb{N}$, berlaku $n > 0$ Teorema 1.1.10 c
 $1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$
 Maka $0 \leq 1 \leq n$
 Sehingga $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
 $\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_3$ berarti 1 adalah batas atas S_3

Sebaliknya $\forall \epsilon, \epsilon > 0$ kita tahu bahwa mungkin saja $1 < \epsilon$ atau $0 < \epsilon < 1$
 misalkan $\epsilon > 0$ berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = S_1 \in S_3$
 Jadi, $\exists S_1 = \frac{1}{1} \in S_3$, sehingga $1 - \epsilon < S_1$
 1 adalah batas atas S_3 dan $\forall \epsilon, \epsilon > 0 \exists S_1 = \frac{1}{1} \in S_3$
 Sehingga $1 - \epsilon \in S_3$ maka menurut lemma 1.3.5
 $\sup S_3 = 1$

Jadi, terbukti $\sup S_3 = 1$ untuk $S_3 = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$

2. Diketahui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

Buktikan bahwa $\inf S = -\sup f^{-1}(S)$

Misalkan $v = \inf S$, maka $-v = \sup f^{-1}(S)$

$v = \inf S$, berarti \forall $\epsilon > 0$ berlaku S

\forall $\epsilon > 0$ \exists $x \in S$ s.t. $x < v + \epsilon$

1.9.2 b

\forall $\epsilon > 0$ \exists $x \in S$ s.t. $x < v + \epsilon$

1.9.1 b

karana $-1 < 0$ maka $-1 < -v$, $\forall \epsilon > 0$, berarti $-v$ batas atas S'

1.9.1 a

Misalkan w sebagai batas atas S' , akan ditunjukkan $-v \leq w$

w batas atas S' berarti $-1 < w$, $\forall \epsilon > 0$

1.9.1 a

$-w$ sebagai batas bawah S dari $v = \inf S$ maka $-w \leq v$

Artinya

$-v$ batas atas S' dan w sebagai batas atas S' berlaku

$-v \leq w$ maka terbukti dengan 1.9.2 a

$-v = \sup S' = \sup f^{-1}(S)$

Sehingga $v = -\sup f^{-1}(S)$

Jadi, $\inf S = -\sup f^{-1}(S)$

3. a. $\lfloor \frac{2n}{m} \rfloor = 2$

Konstruksi

Asumsikan $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \exists \lfloor \frac{2n}{m} \rfloor = 2 \mid \epsilon, n \geq k$ (a)

atau

akan ditunjukkan (a) berlaku

Analisis kerdoktoran

$n < n+2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, maka $\frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{2}{m} < \frac{2}{n}$

$\left| \frac{2n}{m} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2m}{m} \right| = \left| \frac{-1}{m} \right| = \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

Ditulis sebagai $\epsilon > 0$, dimana $\frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{2}{m} < \frac{2}{n}$. Berdasarkan Aksi Archimedes

$\exists k \in \mathbb{N} \exists k < \frac{1}{\epsilon}$

Sehingga jika $n \geq k$, maka $\frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{2}{m} < \frac{2}{n} < \epsilon$

Artinya $\forall \epsilon > 0$ berlaku bahwa

$\left| \frac{2n}{m} - 2 \right| = \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{2}{m} < \frac{2}{n} < \epsilon$

Jadi terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \exists \lfloor \frac{2n}{m} \rfloor = 2 \mid \epsilon, n \geq k$

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \frac{-7}{2} \right|$$

$$\text{Artinya } \forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| < \epsilon, n \geq K (*)$$

atau ditunjukkan (*) berlaku

Analisis Pembatalan

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{2(4-7n) + 7(2n+3)}{(2n+3) \cdot 2} \right| = \left| \frac{8 - 14n + 14n + 21}{2n+6} \right| = \frac{29}{2n+6}$$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{29}{\epsilon} > 0$ Berdasarkan Sifat Archimedes

$$\exists K \in \mathbb{N} \exists K > \frac{29}{\epsilon} \text{ atau } \frac{29}{K} < \epsilon$$

$$\text{Selanjutnya jika } n \geq K \text{ maka diperoleh } \frac{29}{2n+6} < \frac{29}{n} < \frac{29}{K} < \epsilon$$

$$\text{Terbukti bahwa } \forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| < \epsilon, \forall n \geq K.$$

Nama: Exky Yayo Saputri
 NIM: 180101040066
 Mata kuliah: Analisis Real
 Lokal: PMTKA 2018

1. Misalkan $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$

Jawab:

Akan dibuktikan $\sup S_3 = 1$

$1 > 0$ menurut teorema 1.1.10 bagian b

$\forall n \in \mathbb{N}$, berlaku $n > 0$ menurut teorema 1.1.10 bagian c.

$1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ maka $0 < 1 \leq n$

Sehingga $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

* $\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_3$ berarti 1 adalah batas atas dari S_3

Sekarang untuk setiap $\epsilon > 0$ mungkin $1 < 0$ atau $0 < \epsilon < 1$

Misalkan $\epsilon > 0$, berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = S_1 \in S_3$

Jadi $\exists S_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \epsilon < S_\epsilon$

1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists S_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$

Sehingga $1 - \epsilon < S_\epsilon$, maka menurut lemma 1.3.5 $\sup S_3 = 1$

2. Diberikan $S \subset \emptyset \mathbb{R}$ yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jawab:

$S \subset \emptyset \mathbb{R}$

$\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Bukti

Misalkan $v = \inf S$ akan ditunjukkan $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

$v = \inf S$, berarti

i) v batas bawah S

ii) Sebarang t batas bawah S berlaku $t \leq v$

v batas bawah S , berarti $v \leq s, \forall s \in S$

karena $-1 < 0$ maka $-s \leq -v, \forall -s \in S'$, berarti $-v$ batas atas S'

Jadi $-v$ batas atas S'

Misalkan w sebarang batas atas S' , akan ditunjukkan $-v \leq w$

w batas atas S' , berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$

karena $-1 < 0$, maka $s \geq -w, \forall s \in S$, sehingga $-w$ batas bawah S .

$-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$ maka $-w \leq v, -w \in v$.

Akibatnya $-v \leq w$

$-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S' berlaku $-v \leq w$,

maka menurut definisi $-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$

Sehingga $v = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jadi, $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

3. Buktikan limit berikut ini :

a. $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

(Jawab)

akan dibuktikan $\lim \left(\frac{2n}{n+1} \right) = 2$

artinya $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon, \forall n \geq k$ (*)

akan ditunjukkan* berlaku

Analisis pendahuluan

$$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 2}{n+1} \right| = \left| \frac{-2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ambil sebarang $\varepsilon > 0$, berdasarkan sifat Archimedes (akibat 1.45) $\exists k \in \mathbb{N}$ yang memenuhi $0 < \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Selanjutnya jika $n \geq k$ diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ yang memberi $\frac{2}{n} < \varepsilon$

akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 2}{n+1} \right| = \left| \frac{-2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon, \forall n \geq k$

Nama : Fatmah Fajarwah*

NIM : 180101040069

LOKAL : PMTK A 2018

Dorm : juhrani, M.pd

1). Misalkan $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$

Penyelesaian :

Diketahui : $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Akan ditunjukkan : $\sup S_3 = 1$

Bukti :

- Untuk $n \in \mathbb{N}$, berlaku $n > 0$ (Teorema 1.1.10 c)

$$1 > 0 \quad (\text{Teorema 1.1.10 b})$$

karena $1 > 0$, $1 \in \mathbb{N} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

maka $0 < 1 \leq n$.

Sehingga $0 < 1 \leq n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \times 0 < 1 \times \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \quad (\text{Teorema 1.1.9 c})$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{def (!) dan MA})$$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, jelas bahwa 1 merupakan

batas atas dari S_3 . (definisi 1.3.1 a)

- Untuk setiap $\varepsilon > 0$ kemungkinan yang terjadi $1 < \varepsilon$ atau $0 < \varepsilon < 1$. Misalkan $\varepsilon > 0$, berarti $1 - \varepsilon < 1 = \frac{1}{1} = s_1 \in S_3$.
jadi, terdapat $s_\varepsilon = \frac{1}{1} \in S_3 \ni 1 - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Karena 1 adalah batas atas dari S_3 dan $\forall \varepsilon > 0 \exists s_\varepsilon = \frac{1}{1} \in S_3$

sehingga $1 - \varepsilon < s_\varepsilon$, Maka $\sup S_3 = 1$ (Lemma 1.3.5).

Jadi, terbukti bahwa $\sup S_3 = 1$

2. Diberikan S subset tak kosong R yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Penyelesaian:
 Diketahui : $S \neq \emptyset \subset R$ terbatas ke bawah.
 Misalkan : $v = \inf S$
 berarti : (i) v batas bawah S
 (ii) sebarang t batas bawah S berlaku $t \leq v$.

Akan ditunjukkan : $-v = \sup \{-s : s \in S\}$
 $\Leftrightarrow -v = \sup S'$

Bukti:

(i) Akan ditunjukkan $-v$ batas atas S'
 v batas bawah S , berarti $v \leq s, \forall s \in S$ (definisi 1.3.1 b)
 karena $-1 < 0$ maka $-s \leq -v, \forall -s \in S'$ berarti
 $-v$ batas atas S' (definisi 1.2.1 a)
 jadi, $-v$ batas atas S'

(ii) Misalkan w sebarang batas atas S'
 Akan ditunjukkan $-v \leq w$
 w batas atas S' berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$ (definisi 1.2.1 a)
 karena $-1 < 0$ maka $s \geq -w, \forall s \in S$ berarti
 $-w$ batas bawah S (definisi 1.2.1 b)
 $-w$ batas bawah S dan $\inf S = v$ maka $-w \leq v$
 Akibatnya $-v \leq w$

Dari (i) dan (ii) diperoleh
 $-v = \sup S'$
 $\Leftrightarrow -v = \sup \{-s : s \in S\}$ (permisalan)
 $\Leftrightarrow v = -\sup \{-s : s \in S\}$
 $\Leftrightarrow \inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$ (permisalan)

jadi, terbukti bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

3. Buktikan Limit berikut ini:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

penyelesaian:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Artinya : $\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq K$ (*)
 akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis pendahuluan:
 $\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, berdasarkan definisi 1.4.6 $\exists k \in \mathbb{N}$
 yg memenuhi $0 < \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{4}$

Selanjutnya jika $n \geq k$ diperoleh $\frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{4}$

Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa
 $\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} < \frac{\epsilon}{4} < \epsilon$

jadi, terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq k$.

$$b. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Artinya: $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| < \epsilon, \forall n \geq k$ (*)

Akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis pendahuluan:

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6}$$

$$\frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} = \frac{8}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Untuk sebarang $\epsilon > 0$, berdasarkan akibat 1.4.6 $\exists k \in \mathbb{N}$

yang memenuhi: $0 < \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{8}$

Selanjutnya jika $n \geq k$ diperoleh $\frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{8}$ yang

memberi $\frac{8}{n} < \epsilon$

Nama : Felia Astuti
 NIM : 180101040070
 Lokal : PMTK A 2018
 Matakul : Analisis Real

1. Misalkan $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$

Jawab :

Misalkan $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

akan dibuktikan $\sup S_3 = 1$

1.20 menurut teorema 1.1.10 b

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $n > 0$ (Teorema 1.1.10 c)

1.20, $1 \in \mathbb{N}$, $n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $0 < 1 \leq n$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

$$\frac{1}{n} \cdot 0 < \frac{1}{n} \cdot 1 \leq \frac{1}{n} \cdot n \quad (\text{Teorema 1.1.9 c})$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \quad M_3 \text{ dan } M_4$$

sehingga :

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall \frac{1}{n} \in S_3 \Rightarrow 1 \text{ adalah batas atas } S_3$$

untuk setiap $\epsilon > 0 \Rightarrow 1 - \epsilon < 1$ atau $0 < \epsilon < 1$

Misalkan $\epsilon > 0$ berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = S_3 \in S_3$

Jadi, $\exists S_3 = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \epsilon < S_3$

1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists S_3 = \frac{1}{1} \in S_3$

sehingga $1 - \epsilon < S_3$, maka $\sup S_3 = 1$ (lemma 1.5.5)

2. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yg terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jawab:

Diketahui $S \neq \emptyset$, $S \subset \mathbb{R}$, ada u batas atas S

akan dibuktikan : $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Bukt :

Misalkan $v = \inf S$, maka akan dibuktikan $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

$v = \inf S$, artinya : 1). v adalah batas bawah dari S

2). ada sebarang ϵ batas bawah dari S , berarti $v \leq s$, $\forall s \in S$

(definisi 1.3.1 b)

• karena $-1 < 0$, maka $-s \leq -v$, $\forall -s \in S'$ (Teorema 1.1.g d)

berarti $-v$ adalah batas atas S'

misalkan w sebarang batas atas S' , akan dibuktikan $-v \leq w$

w sebarang batas atas S' , berarti $-s \leq w$, $\forall -s \in S'$

• karena $-1 < 0$, maka $s \geq -w$, $\forall s \in S$ (Teorema 1.1.g d)

sehingga $-w$ batas bawah S

• $-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$, maka $-w \leq v$ (definisi 1.3.2 b)

$$-w \leq v$$

$$(-1)(-w) \geq (-1)v$$

Teorema 1.1.g b

$$(-1)(-w) \geq -v$$

Teorema 1.1.3 a

$$(-1)(-1)w \geq -v$$

M.I.

$$1 \cdot w \geq -v$$

Teorema 1.1.3 c

$$w \geq -v$$

Identitas perkalian

$-w \leq v$ sehingga $w \geq -v$ atau $-v \leq w$

dengan itu, $-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S'

berlaku $-v \leq w$, maka menurut definisi $-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$

sehingga $v = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jadi, $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Berdasarkan definisi 2.1.4, artinya

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \rightarrow \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \epsilon, \forall n > K \dots (*)$$

akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis Pendahuluan

$$\begin{aligned} \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| &= \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{(4-7n)(2) + (7)(2n+3)}{(2n+3)(2)} \right| \\ &= \left| \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right| \\ &= \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{29}{n} \end{aligned}$$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{29}{\epsilon} > 0$, berdasarkan sifat archimedes $\exists c \in \mathbb{N} \exists K > \frac{29}{\epsilon}$ atau $\frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{29}$

Selanjutnya jika $n > K$, diperoleh $\frac{1}{n} < \frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{29}$, sehingga $\frac{29}{n} < \frac{29}{K} < \epsilon$

akibatnya $n > K$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{29}{n} < \frac{29}{K} < \epsilon$$

Jadi terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \rightarrow \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \epsilon, \forall n > K$

karena itu $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Nama : Hanan
 NIM : 180101040059
 Mata Kuliah / Lokal : Analisis Real / PMTKA 2018
 Dosen Pengampu : Juhani, M.Pd.

Final Test
 Rabu, 14 Mei 2020

1. Misalkan $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$.

Jawab:
 Diketahui: $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
 Akan dibuktikan: $\sup S_3 = 1$
 Jelas bahwasanya: $1 > 0$ Teorema 1.1.10-b
 Jika $n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$ Teorema 1.1.10-c

$1 > 0$
 $1 \in \mathbb{N}$, $n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ } maka $0 < 1 \leq n$

Sehingga, $0 < 1 \leq n$

$\Rightarrow \frac{0}{n} < \frac{1}{n} \leq \frac{n}{n}$ Teorema 1.1.8-c

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Hal ini berarti bahwa $\frac{1}{n} \leq 1$ dan $\frac{1}{n} > 0, \forall \frac{1}{n} \in S_3$

* Untuk $\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_3$
 Dari pernyataan di atas, berarti 1 adalah batas atas dari S_3 Definisi 1.3.1.a
 $\forall \epsilon > 0, 1 < \epsilon$ atau $0 < \epsilon < 1$
 Misal $\epsilon > 0$, berarti: $1 - \epsilon < 0$ Teorema 1.1.8-d
 $1 - \epsilon < 1 + 0$ Teorema 1.1.8-b
 $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = s_1 \in S_3$ A3

Jadi, $\exists s_1 = \frac{1}{1} \in S_3$, sehingga $1 - \epsilon \in S_3$

Dimana 1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\epsilon > 0$, ada $s_1 = \frac{1}{1} \in S_3$, sehingga
 $1 - \epsilon < s_1$. Maka menurut Lemma 1.3.5 $\sup S_3 = 1$.

* Untuk $\frac{1}{n} > 0, \forall \frac{1}{n} \in S_3$ (terbukti saja).
 Asumsikan 0 bukan batas bawah dari S_3 , berarti $\exists s \in S_3$, sehingga $s < 0$.
 Jika $s < 0$, maka $s \notin S_3$
 Hal ini kontradiksi dengan $s \in S_3$, sehingga pengandaian salah. Maka yang benar
 0 adalah batas bawah S_3
 Jadi, terbukti bahwa $\sup S_3 = 1$.

2. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa

$$\inf S = - \sup \{ -s : s \in S \}$$

Jawab:
 Diketahui: $S \neq \emptyset, S \subseteq \mathbb{R}$, dan ada u batas atas S .
 Akan dibuktikan: $\inf S = - \sup \{ -s : s \in S \}$

Bukti:
 * Misal, $v = \inf S$, maka akan dibuktikan $-v = \sup \{ -s : s \in S \}$
 $= \sup S'$

Dari $v = \inf S$, berarti : i) v adalah batas bawah dari S Def. 1.3.2.b
 ii) ada sebarang t batas bawah dari S , maka $t \leq v$

v adalah batas bawah dari S , maka $v \leq s, \forall s \in S$ Definisi 1.3.1.b
 Karena $-1 < 0$ maka $-s \leq -v, \forall s \in S'$ Teorema 1.1.9.d
 Sehingga, jelas bahwa $-v$ adalah, batas atas dari S' Definisi 1.3.1.a

Misalkan w sebarang batas atas S' , akan dibuktikan $-v < w$
 w sebarang batas atas S' , berarti $-s \leq w, \forall s \in S'$ Definisi 1.3.1.a
 Karena $-1 < 0$, maka $s \geq -w, \forall s \in S'$ Teorema 1.1.9.d
 Sehingga $-w$ adalah, batas bawah S Definisi 1.3.1.b
 Karena $-w$ sebarang batas bawah S dan $\inf S = v$, maka $-w \leq v$ Definisi 1.3.2.b
 $-w \leq v$
 $(-1)(-w) \geq (-1)(v)$ Teorema 1.1.9.d
 $(-1)(-w) \geq -v$ Teorema 1.1.3.a
 $((-1)(-1))w \geq -v$ M_2
 $1 \cdot w \geq -v$ Teorema 1.1.3.c
 $w \geq -v$ M_3

Dari sini jelas bahwa $-v$ adalah, batas atas S' , dan w adalah sebarang batas atas S' ,
 berlaku $-v \leq w$. Sehingga berdasarkan definisi
 $-v = \sup S'$
 $-v = \sup \{ -s : s \in S \}$ sehingga
 $v = -\sup \{ -s : s \in S \}$
 $\infty \inf S = -\sup \{ -s : s \in S \}$
 Jadi, terbukti bahwa $\inf S = -\sup \{ -s : s \in S \}$.

3. Buktikan, limit, berikut ini:

a. $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$ b. $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Jawab:

a. Akan dibuktikan: $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$.

Berdasarkan definisi 2.1.4, artinya:

$$\forall \epsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq k$$

Akan ditunjukkan bahwa definisi tersebut berlaku.

Analisis Pendahuluan:

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2(n+2)}{n+2} \right|$$

$$= \left| \frac{2n-2n-4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right|$$

$$= \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, diperoleh $\frac{4}{\varepsilon} > 0$.
 Berdasarkan sifat Archimedes, $\exists k \in \mathbb{N} \ni k > \frac{4}{\varepsilon}$ atau $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{4}$
 Selanjutnya, jika $n > k$, diperoleh

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{n} < \frac{4}{k} < \varepsilon$$

Akibatnya, $\forall n > k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} < \frac{4}{k} < \varepsilon$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \varepsilon, \text{ sehingga}$$

Definisi: $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \varepsilon, \forall n > k$ berlaku.

Jadi, benar bahwa $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

b. Akan dibuktikan: $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Berdasarkan definisi 2.1.4, artinya:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \varepsilon, \forall n > k$$

Akan ditunjukkan bahwa definisi di atas berlaku.

Analisis Pendahuluan

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| = \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{2(4-7n) + 7(2n+3)}{2(2n+3)} \right|$$

$$= \left| \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right|$$

$$= \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{29}{n}$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, diperoleh $\frac{29}{\varepsilon} > 0$
 Berdasarkan sifat Archimedes $\exists k \in \mathbb{N} \ni k > \frac{29}{\varepsilon}$ atau $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{29}$

Selanjutnya,

Jika $n > k$, diperoleh

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{29}$$

$$\Leftrightarrow \frac{29}{n} < \frac{29}{k} < \varepsilon$$

Akibatnya, $\forall n > k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{29}{n} < \frac{29}{k} < \varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \varepsilon, \text{ sehingga}$$

Definisi: $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \varepsilon, \forall n > k$ berlaku.

Jadi, benar bahwa $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

NAMA	Hazimah Akbar Aijabari
NIM	180101090068
MATA KULIAH / KLS	Analisis Real / PMTKA 2018
Dosen Pengasuh	Juhroni, M.Pd.

Final Test
Kamis, 14 Mei 2020

1. Misalkan $S_3 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$

Penyelesaian:

Akan dibuktikan $\sup S_3 = 1$.

$1 > 0$ menurut teo 2.1.8 (b)

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $n > 0$ menurut teo 2.1.8 (c)

$1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $0 < 1 \leq n$.

Sehingga $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_3$ berarti 1 adalah batas atas dari S_3 .

Sekarang untuk setiap $\epsilon > 0$ mungkin saja $1 - \epsilon < 1$ atau $0 < \epsilon < 1$.

Misalkan $\epsilon > 0$, berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = S_\epsilon \in S_3$. Jadi, $\exists S_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \epsilon < S_\epsilon$.

1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists S_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_\epsilon$, maka menurut lemma 2.3-4 $\sup S_3 = 1$.

2. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah.

Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$.

Penyelesaian:

Misalkan $v = \inf S$ maka akan dibuktikan $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$.

$v = \inf S$ berarti v batas bawah S .

v batas bawah S , berarti $v \leq s, \forall s \in S$

Karena $-1 < 0$, maka $-s \leq -v, \forall -s \in S'$, berarti $-v$ batas atas S' . Jadi, $-v$ batas atas S' .

Misalkan w sebarang batas atas S' akan dibuktikan $-v \leq w$.

w batas atas S' berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$.

Karena $-1 < 0$, maka $s \geq -w, \forall s \in S$, sehingga $-w$ batas bawah S .

$-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$, maka $-w \leq v$. Akibatnya $-v \leq w$.

$-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S' berlaku $-v \leq w$, maka menurut definisi $-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$

Sehingga $v = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jadi, $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

3. Buktikan limit berikut ini:

$$a. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

Penyelesaian:

$$\text{artinya } \forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \varepsilon, \forall n \geq k \quad (*)$$

akan ditunjukkan (*) berlaku:

Perhatikan bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$$

ambil sebarang $\varepsilon > 0$ diperoleh $\frac{4}{\varepsilon} > 0$, berdasarkan sifat Archimedes

$\exists k \in \mathbb{N} \exists k > \frac{4}{\varepsilon}$ atau $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{4}$, sehingga $\frac{4}{k} < \varepsilon$.

Jika $n \geq k$, maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{4}{n} \leq \frac{4}{k} < \varepsilon$

akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{k} < \varepsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \varepsilon, \forall n \geq k$

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Penyelesaian:

$$\text{artinya } \forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \varepsilon, \forall n \geq k \quad (*)$$

akan ditunjukkan (*) berlaku:

Perhatikan bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| = \left| \frac{8-14+14+21}{4n+6} \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} < \frac{8}{n}$$

ambil sebarang $\varepsilon > 0$, berdasarkan sifat Archimedes

$\exists k \in \mathbb{N} \exists k > \frac{8}{\varepsilon}$ atau $\frac{8}{k} < \varepsilon$, jika $n \geq k$ diperoleh $\frac{8}{n} \leq \frac{8}{k} < \varepsilon$.

akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| = \left| \frac{8-14+14+21}{4n+6} \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{8}{n} \leq \frac{8}{k} < \varepsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \varepsilon, \forall n \geq k$.

Nama : Khairun Nisa
 Nim : 180101090057
 Mata Kuliah : Analisis Real
 Total : PMTK A 2018

1. Misalkan $S_2 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_2 = 1$

Jawab :

Diketahui $S_2 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Bukti :

Akan dibuktikan $\sup S_2 = 1$

$$1 > 0$$

Teorema 1.1.10 (b)

$\forall n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$

Teorema 1.1.10 (c)

$1 > 0$, $1 \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ maka $0 < 1 \leq n$

Sehingga, $0 < 1 \leq n$

$$\Leftrightarrow \frac{0}{n} < \frac{1}{n} \leq \frac{n}{n}$$

Teorema 1.1.9 (c)

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Hal ini berarti $\frac{1}{n} \leq 1$ atau $\frac{1}{n} > 0$, $\forall \frac{1}{n} \in S_2$

• $\frac{1}{n} \leq 1$, $\forall \frac{1}{n} \in S_2$ berarti 1 adalah batas atas dari S_2 . Definisi 1.3.1 (a)

$\forall \epsilon > 0$, $1 - \epsilon$ atau $0 < \epsilon < 1$.

Misalkan $\epsilon > 0$, berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = s_1 \in S_2$.

Jadi, $\exists s_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_2$ sehingga $1 - \epsilon < s_\epsilon$.

1 adalah batas atas S_2 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists s_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_2$.

Sehingga $1 - \epsilon < s_\epsilon$, maka menurut lemma 1.3.5, $\sup S_2 = 1$

2. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas kebawah. Buktikan bahwa

$$\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$$

Jawab :

Diketahui : $S \neq \emptyset$, $S \subseteq \mathbb{R}$, ada u batas atas S

Bukti :

Akan dibuktikan $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Misalkan $v = \inf S$, maka akan dibuktikan $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

$v = \inf S$, artinya : (i) v adalah batas bawah dari S

(ii) ada sebarang t batas bawah dari S , maka

$$t \leq v.$$

v adalah batas bawah dari S , berarti $v \leq s$, $\forall s \in S$ Definisi 1.3.1 (b)

karena $-1 < 0$, maka $-s \leq -v, \forall s \in S'$ Teorema 1.1.9 (d)
 Berarti $-v$ adalah batas atas S'
 Misal w sebarang batas atas S' , akan dibuktikan $-v \leq w$
 w sebarang batas atas S' , berarti $-s \leq w, \forall s \in S'$.
 Karena $-1 < 0$, maka $s > -w, \forall s \in S$ Teorema 1.1.9 (d)
 Sehingga $-w$ batas atas S .
 $-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$, maka $-w \leq v$
 Hal ini sesuai definisi 1.3.2 (b)

$$-w \leq v$$

 $\Leftrightarrow (-1)(-w) \geq (-1)(v)$ Teorema 1.1.9 (b)
 $\Leftrightarrow w \geq -v$ Teorema 1.1.9 (b) dan (a)
 $\Leftrightarrow -v \leq w$
 Dengan ini, maka $-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S'
 berlaku $-v \leq w$, maka menurut definisi

$$-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S'\}$$

 Sehingga $v = -\sup \{-s : s \in S'\}$
 Jadi, $\inf S = -\sup \{-s : s \in S'\}$

3. Buktikan limit berikut ini :

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Jawab :

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

berdasarkan definisi 2.1.4 artinya

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq K \dots (*)$$

Atan ditunjukkan (*) berlaku
 Analisis pendahuluan

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| -\frac{4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{4}{\epsilon} > 0$. Berdasarkan Sifat Archimedes

$$\exists K \in \mathbb{N} \exists K > \frac{4}{\epsilon} \text{ atau } \frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{4}, \text{ sehingga } \frac{4}{K} < \epsilon.$$

Selanjutnya jika $n \geq K$, maka $\frac{1}{n} < \frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{4}$.

Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{k} < \epsilon.$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} \right| < \epsilon, \forall n \geq k.$$

maka terbukti $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

b. $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Berdasarkan definisi 2.1.4 artinya

$$\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| < \epsilon, \forall n \geq k \dots (*)$$

Akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis Pendahuluan

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6}$$

$$\frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} < \frac{8}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{8}{\epsilon} > 0$, berdasarkan Axiom Archimedes

$$\exists k \in \mathbb{N} \ni k > \frac{8}{\epsilon} \text{ atau } \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{8}$$

Selanjutnya jika $n \geq k$, diperoleh $\frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{8}$ sehingga $\frac{8}{n} \leq \frac{8}{k} < \epsilon$.

Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} < \frac{8}{n} \leq \frac{8}{k} < \epsilon.$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| < \epsilon, \forall n \geq k.$$

maka terbukti $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Nama : Khadijah
 NIM : 180101040052
 Mata kuliah : Analisis Real
 Lokal : PMTK A 2018
 Dosen pengampu : Juhroni, M. Pd.

1. Misalkan $S_3 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tunjukkan bahwa $\text{Sup } S_3 = 1$
 Penyelesaian :
 Akan dibuktikan $\text{sup } S_3 = 1$
 $1 > 0$ (Teorema 1.1.10.b)
 Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$ (Teorema 1.1.10.c)
 $1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, maka $0 < 1 \leq n$
 $0 < 1 \leq n$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{n} \cdot 0 < \frac{1}{n} \cdot 1 \leq \frac{1}{n} \cdot n \rightarrow$ Teorema 1.1.9.c
 $\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \rightarrow M_3 \text{ dan } M_4$

Sehingga $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$
 Akan ditunjukkan bahwa $\text{Sup } S_3 = 1$
 $\frac{1}{n} \leq 1 \forall \frac{1}{n} \in S_3$, maka 1 adalah batas atas S_3
 Untuk setiap $\epsilon > 0$, maka $1 - \epsilon < 1$ atau $0 < \epsilon < 1$
 Misalkan $\epsilon > 0$ berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = S_\epsilon \in S_3$
 Jadi $\exists S_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \epsilon < S_3$
 1 adalah batas atas S_3 dan $\forall \epsilon > 0 \exists S_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$
 $1 - \epsilon < S_3$, maka $\text{Sup } S_3 = 1$ (Lemma 1.3.5)

2. Misalkan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\text{inf } S = -\text{sup}\{-s : s \in S\}$
 Penyelesaian :
 Diketahui : $S \neq \emptyset, S \subseteq \mathbb{R}$, ada u batas atas S
 Akan dibuktikan : $\text{inf } S = -\text{sup}\{-s : s \in S\}$
 Bukti :
 Misalkan $v = \text{inf } S$, maka menurut definisi 1.3.2.a :
 i) v adalah batas bawah dari S
 ii) ada sebarang t batas bawah S , maka $t \leq v$
 Akan dibuktikan $-v = \text{sup}\{s : s \in S'\}$
 v adalah batas bawah dari S , berarti $v \leq s, \forall s \in S$ (Definisi 1.3.1.b)
 • karena $-1 < 0$, maka $-s < -v, \forall -s \in S'$
 berarti $-v$ adalah batas atas S'
 misalkan w sebarang batas atas S' , akan dibuktikan $-v \leq w$

w sebarang batas atas S' , berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$

karena $-1 < 0$, maka $s > -w, \forall s \in S'$

sehingga $-w$ adalah batas bawah S'

$-w$ sebarang batas bawah dari S dan $v = \inf S$, maka $-w \leq v$ (Definisi 1.3.2.b)

$$-w \leq v$$

$$\Leftrightarrow (-1)w \leq v \quad \rightarrow \text{Teorema 1.1.3.a}$$

$$\Leftrightarrow (-1)(-1)w \geq (-1)v \quad \rightarrow \text{Teorema 1.1.9.d}$$

$$\Leftrightarrow ((-1)(-1))w \geq -v \quad \rightarrow M_2 \text{ dan teorema 1.1.3.a}$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot w \geq -v \quad \rightarrow \text{Teorema 1.1.3.c}$$

$$\Leftrightarrow w \geq -v \quad \rightarrow M_3$$

$-w \leq v$ sehingga $w \geq -v$ atau $-v \leq w$

Dengan itu, $-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S'

Berlaku $-v \leq w$, maka menurut definisi

$$-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$$

$$\text{Sehingga } v = -\sup \{-s : s \in S\}$$

$$\text{Jadi, } \inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$$

Terbukti.

3. Buktikan limit berikut ini :

$$a. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Penyelesaian:

$$a. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

$$\text{Artinya } \forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq K (*)$$

Akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis pendahuluan :

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$ diperoleh $\frac{4}{3} > 0$. Berdasarkan sifat Archimedes $\exists K \in \mathbb{N} \exists K < \frac{4}{\epsilon}$ atau $\frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{4}$, sehingga $\frac{4}{K} < \epsilon$.

Selanjutnya jika $n \geq K$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} \Leftrightarrow \frac{4}{n} \leq \frac{4}{K} < \epsilon$

Akibatnya $\forall n \geq K$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{K} < \epsilon$$

Jadi terbukti bahwa $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathcal{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \varepsilon, \forall n \geq k$, karena itu $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

$$b. \lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Artinya:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathcal{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \varepsilon \forall n \geq k \quad (*)$$

Atan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis pendahuluan:

$$\begin{aligned} \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| &= \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{2(4-7n) + 7(2n+3)}{2(2n+3)} \right| = \left| \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| \\ &= \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} = \frac{8}{n} \end{aligned}$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, diperoleh $\frac{8}{\varepsilon} > 0$, berdasarkan sifat Archimedes $\exists k \in \mathcal{N} \ni k > \frac{8}{\varepsilon}$ atau $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{8}$. Sehingga $\frac{8}{k} < \varepsilon$.

Selanjutnya jika $n \geq k$ diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{8} \Rightarrow \frac{8}{n} \leq \frac{8}{k} < \varepsilon$

Atibatnya $\forall n \geq k$ berlaku

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} = \frac{8}{n} \leq \frac{8}{k} < \varepsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathcal{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \varepsilon \forall n \geq k$

karena itu, $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Nama : Linda Nor Syifa
 NIM : 180101040056
 Mata Kuliah : Analisis Real
 Lokal : A 2018
 Dosen Pengampu : Juhrani, M. Pd.

Ujian Akhir Semester (UAS)

1. Misalkan $S_3 = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$.

Jawab :

Diketahui $S_3 = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$

Akan dibuktikan : $\sup S_3 = 1$

$1 > 0$ (Teo. 1.1.10 (b))

$\forall n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$ (Teo. 1.1.10 (c))

$1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ maka $0 < 1 \leq n$

Sehingga, $0 < 1 \leq n$

$$\Leftrightarrow \frac{0}{n} < \frac{1}{n} \leq \frac{n}{n} \quad (\text{Teo. 1.1.9 (c)})$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Hal ini berarti $\frac{1}{n} \leq 1$ atau $\frac{1}{n} > 0, \forall \frac{1}{n} \in S_3$.

• $\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_3$ berarti 1 adalah batas atas dari S_3 (Definisi 1.3.1 (a))

$\forall \epsilon > 0, 1 < \epsilon$ atau $0 < \epsilon < 1$

Misalkan $\epsilon > 0$, berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = S_1 \in S_3$.

Jadi, $\exists S_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \epsilon < S_\epsilon$.

1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists S_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$.

Sehingga $1 - \epsilon < S_\epsilon$, maka menurut lemma 1.3.5, $\sup S_3 = 1$.

• $\frac{1}{n} > 0, \forall \frac{1}{n} \in S_3$

Andaikan 0 bukan batas bawah dari S_3 , berarti $\exists s \in S_3$ sehingga $s < 0$.

Jika $s < 0$, maka $s \notin S_3$. Hal ini kontradiksi dengan $s \in S_3$, sehingga

Pengandaian salah.

Jadi, 0 batas bawah dari S_3 .

2. Diketahui S subset tak kosong \mathbb{R} yang terikat ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$.

Jawab:

Diketahui: $S \neq \emptyset$, $S \subseteq \mathbb{R}$, ada u batas atas S .

Akan dibuktikan: $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Bukti:

Misalkan $v = \inf S$, maka akan dibuktikan $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

$v = \inf S$, berarti:

1) v adalah batas bawah dari S

2) ada sebarang t batas bawah dari S , maka $t \leq v$.

v adalah batas bawah dari S , berarti $v \leq s$, $\forall s \in S$ (Definisi 1.3.1 (b))

Karena $-1 < 0$, maka $-s \leq -v$, $\forall s \in S'$ (Teo. 1.1.9 (d))

Berarti $-v$ adalah batas atas S' .

Misal w adalah sebarang batas atas S' , akan dibuktikan $-v \leq w$.

w sebarang batas atas S' , berarti $-s \leq w$, $\forall s \in S'$.

Karena $-1 < 0$, maka $s > -w$, $\forall s \in S$ (Teo. 1.1.9 (d))

Sehingga $-w$ batas bawah S .

$-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$, maka $-w \leq v$

Hal ini sesuai definisi 1.3.2 (b)

$$-w \leq v$$

$$\Leftrightarrow (-1)(-w) \geq (-1)(v) \quad (\text{Teo. 1.1.9 (k)})$$

$$\Leftrightarrow w \geq -v \quad (\text{Teo. 1.1.3 (b), (a)})$$

$$\Leftrightarrow -v \leq w$$

Dengan itu, $-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S' berlaku

$-v \leq w$, maka menurut definisi

$$-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$$

$$\text{Sehingga } v = -\sup \{-s : s \in S\}$$

$$\text{Jadi, } \inf S = -\sup \{-s : s \in S\}.$$

3. Buktikan limit berikut ini:

$$a. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

Jawab:

Berdasarkan definisi 2.1.1, artinya

$$\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq k \quad (*)$$

Akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis pendahuluan

$$n < n+2, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ maka } \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n}$$

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| -\frac{4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$$

Amkri sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{4}{\epsilon} > 0$. Berdasarkan sifat

$$\text{Archimedes } \exists k \in \mathbb{N} \ni k > \frac{4}{\epsilon} \text{ atau } \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{4}, \text{ sehingga } \frac{4}{k} < \epsilon.$$

$$\text{Selanjutnya, jika } n \geq k, \text{ maka } \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{4}{n} \leq \frac{4}{k} < \epsilon.$$

Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{k} < \epsilon.$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq k$$

$$\text{Karena itu, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2.$$

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Jawab :

Berdasarkan definisi 2.1.4, artinya

$$\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \rightarrow \left| \frac{1-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| < \epsilon, \forall n \geq k \quad \dots (*)$$

Atau ditunjukkan (*) berlaku

Analisis pendahuluan :

$$\left| \frac{1-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6}$$

$$\frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} = \frac{8}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Untuk sebarang $\epsilon > 0$, berdasarkan aritmatika 1.4.6 $\exists k \in \mathbb{N}$

$$\text{yang memenuhi } 0 < \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{8}$$

Selanjutnya jika $n \geq k$ diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{8}$ yang memberi $\frac{8}{n} \leq \frac{8}{k} < \epsilon$.

Atikahnya $\forall n \geq k$ berlaku

$$\left| \frac{1-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} = \frac{8}{n} \leq \frac{8}{k} < \epsilon, \forall n \geq k.$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \rightarrow \left| \frac{1-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| < \epsilon, \forall n \geq k.$

$$\text{karena itu, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}.$$

Nama : Mahmudah
 NIM : 180101040055
 Mata Kuliah : Analisis Real
 Lokal : PMTK A 2018

UJIAN AKHIR SEMESTER (UAS)

1. Misalkan $S_3 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$

Penyelesaian:

Diketahui: $S_3 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Akan dibuktikan: $\sup S_3 = 1$

Bukti:

$$1 > 0$$

Teorema 1.1.10 (b)

$\forall n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$

Teorema 1.1.10 (c)

Karena $1 > 0$, $1 \in \mathbb{N}$, $n > 0$ maka $0 < 1 \in \mathbb{N}$

sehingga, $0 < 1 \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{0}{n} < \frac{1}{n} \leq \frac{n}{n}$$

Teorema 1.1.9 (c)

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Hal ini berarti $\frac{1}{n} \leq 1$ atau $\frac{1}{n} > 0$, $\forall \frac{1}{n} \in S_3$

• $\frac{1}{n} \leq 1$, $\forall \frac{1}{n} \in S_3$ berarti 1 adalah batas atas dari S_3 (Definisi 1.3.1 (a))

$\forall \epsilon > 0$, $1 - \epsilon < 1$ atau $0 < \epsilon < 1$

Misalkan $\epsilon > 0$, berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} \in S_3$

Jadi, $\exists s_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$, sehingga $1 - \epsilon < s_\epsilon$

Batas atas S_3 adalah 1 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists s_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$,

sehingga $1 - \epsilon < s_\epsilon$, maka menurut Lemma 1.3.5, $\sup S_3 = 1$

• $\frac{1}{n} > 0$, $\forall \frac{1}{n} \in S_3$

Andaikan 0 bukan batas bawah dari S_3 , berarti $\exists s \in S_3$ sehingga

$$s < 0$$

Jika $s < 0$, maka $s \in S_3$

Hal ini kontradiksi dengan $s \in S_3$, sehingga pengandaian salah, yang benar adalah 0 batas bawah dari S_3 ($\inf S_3 = 0$)

Jadi, terbukti bahwa $\sup S_3 = 1$.

z. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa
 $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$.
 Penyelesaian:
 Diketahui: $S \neq \emptyset, S \subseteq \mathbb{R}$
 Akan dibuktikan: $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$
 Bukt:

Misalkan $V = \inf S$, maka akan dibuktikan $-V = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$
 $V = \inf S$ artinya, i) V adalah batas bawah dari S
 ii) Ada sebarang ϵ batas bawah S berlaku $\epsilon \leq V$ } Definisi 1.3.2 (b)
 V batas bawah dari S , berarti $V \leq s, \forall s \in S$. Definisi 1.3.1 (b)
 Karena $-1 < 0$, maka $-s \leq -V, \forall -s \in S'$ berarti
 V adalah batas atas S' .
 Akan dibuktikan $-V \in w$
 w batas atas S' berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$
 Karena $-1 < 0$, maka $s \geq -w, \forall s \in S$, sehingga
 $-w$ batas bawah S .
 $-w$ sebarang batas bawah S dan $V = \inf S$, } Definisi 1.3.2 (b)
 maka $-w \leq V$
 $-w \leq V$
 $\Leftrightarrow (-1)(-w) \geq (-1)V$ Teorema 1.1.9 (b)
 $\Leftrightarrow (-1)(-w) \geq -V$ Teorema 1.1.3 (a)
 $\Leftrightarrow (1)w \geq -V$ Teorema 1.1.3 (c)
 $\Leftrightarrow w \geq -V$ M_3
 $\Leftrightarrow w \geq -V$ M_4
 $-w \in w$ sehingga $w \geq -V$ atau $-V \in w$
 Oleh karena itu, $-V$ batas atas S' dan w sebarang
 batas atas S' berlaku $-V \leq w$, maka menurut definisi 1.3.2 (a)
 $-V = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$ sehingga $V = -\sup \{-s : s \in S\}$
 Jadi, $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

3. Buktikan limit berikut ini

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Penyelesaian:

a) Akan dibuktikan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+2} = 2$

Berdasarkan definisi 2.1-4 artinya

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \rightarrow \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, n \geq K \quad (*)$$

Akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis Pendahuluan

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2(n+2)}{n+2} \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{1}{\epsilon} > 0$. Berdasarkan sifat Archimedes

$$\exists K \in \mathbb{N} \rightarrow K > \frac{4}{\epsilon} \text{ atau } \frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{4}, \text{ sehingga } \frac{4}{K} < \epsilon.$$

Selanjutnya jika $n \geq K$, maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K}$ sehingga $\frac{4}{n} \leq \frac{4}{K} < \epsilon$.

Akibatnya $\forall n \geq K$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} < \frac{4}{K} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \rightarrow \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq K$.

Karena itu $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

b) Akan dibuktikan $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Berdasarkan definisi 2.1-4 artinya

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \rightarrow \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \epsilon, \forall n \geq K \quad (*)$$

Akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis Pendahuluan

$$\begin{aligned} \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| &= \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{(2)(4-7n) + (2n+3)(7)}{(2n+3)(2)} \right| \\ &= \left| \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right| \\ &= \left| \frac{29}{4n+6} \right| \\ &= \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{29}{n} \end{aligned}$$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{29}{\epsilon} > 0$. Berdasarkan sifat Archimedes $\exists K \in \mathbb{N} \rightarrow K > \frac{29}{\epsilon}$ atau $\frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{29}$

Selanjutnya jika $n \geq K$, diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{29}$, sehingga $\frac{29}{n} \leq \frac{29}{K} < \epsilon$.

Akibatnya $\forall n \geq K$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{29}{n} \leq \frac{29}{K} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \rightarrow \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \epsilon, \forall n \geq K$

Karena itu, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$.

Nama : Maulina Fakhrunnisa Salsanabilo
 Final : Analisis Real
 NIM : 180101090058
 kelas : PMTK A 2018

1) Misalkan $S_3 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$.

Penyelesaian:

Misalkan $S_3 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Akan dibuktikan $\sup S_3 = 1$.

$$1 > 0$$

1.1.10.b

$\forall n \in \mathbb{N}$, berlaku $n > 0$

1.1.10.c

$1 > 0$, $1 \in \mathbb{N}$, $n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ maka $0 < 1 \leq n$

sehingga $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{n} \leq 1$, $\forall \frac{1}{n} \in S_3$ berarti 1 adalah batas atas S_3

Definisi 1.3.1.a

$\forall \epsilon > 0$, mungkin saja $1 < \epsilon$ atau $0 < \epsilon < 1$

Misalkan $\epsilon > 0$, berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = s_\epsilon \in S_3$

Jadi, $\exists s_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \epsilon < s_\epsilon$

1 adalah batas atas S_3 dan $\forall \epsilon > 0 \exists s_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$

1.3.5 Lemma

sehingga $1 - \epsilon < s_\epsilon$, dapat disimpulkan $\sup S_3 = 1$

1.3.6 contoh.

2) Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Penyelesaian:

Misalkan $v = \inf S$

$v = \inf S$ berarti (i) v batas bawah S

Definisi 1.3.2.b

(ii) Sebarang t batas bawah S berlaku $t \leq v$

Akan ditunjukkan: $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

a. Akan ditunjukkan $-v$ batas atas S'

v batas bawah S , berarti $v \leq s$, $\forall s \in S$

Definisi 1.3.1.b

karena $-1 < 0$ maka $-s \leq -v$, $\forall -s \in S'$, berarti $-v$ batas atas S'

Definisi 1.3.1.a

b. Misalkan w sebarang batas atas S' , $-v \leq w$

w batas atas S' berarti $-s \leq w$, $\forall -s \in S'$

Definisi 1.3.1.a

karena $-1 < 0$ maka $s \geq -w$, $\forall s \in S$, sehingga $-w$ batas bawah S

Definisi 1.3.1.b

$-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$ maka $-w \leq v$

Definisi 1.3.2.b

Akibatnya $-v \leq w$

Dari a dan b diperoleh $-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$ sehingga $v = -\sup \{-s : s \in S\}$

Terbukti bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

3) Buktikan limit berikut ini :

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Artinya $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq k$ (*) 2.1.4

Akan ditunjukkan bahwa (*) berlaku :

Analisis pendahuluan



$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Amil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{1}{\epsilon} > 0$, berdasarkan sifat archimedes $\exists k \in \mathbb{N} \ni k > \frac{1}{\epsilon}$ atau $\frac{1}{k} < \epsilon$. Jika $n \geq k$ diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \epsilon$

Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{k} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq k$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Artinya $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| < \epsilon, \forall n \geq k$ (*) 2.1.4

Akan ditunjukkan bahwa (*) berlaku :

Analisis pendahuluan

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| = \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{29}{n}$$

Amil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{1}{\epsilon} > 0$, berdasarkan sifat archimedes

$\exists k \in \mathbb{N} \ni k > \frac{1}{\epsilon}$ atau $\frac{1}{k} < \epsilon$. Jika $n \geq k$ diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \epsilon$

Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| < \frac{29}{n} \leq \frac{29}{k} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| < \epsilon, \forall n \geq k$

Nama : Mia Asfia
 NIM : 180101040001
 Mata Kuliah/Kelas : Analisis Real / PMTKA 2018
 Dosen Pengampu : Juhrani, M.Pd

FINAL TEST

Kamis
 14/05 2020

① Misalkan $S_3 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, tunjukkan bahwa $\text{Sup } S_3 = 1$.

Jawab:

Diketahui: $S_3 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Akan dibuktikan: $\text{Sup } S_3 = 1$

Bukti:

$1 > 0$

Teorema 1.1.10(b)

$\forall n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$

Teorema 1.1.10(c)

$1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, maka $0 < 1 \leq n$

$$0 < 1 \leq n$$

$$\Leftrightarrow \frac{0}{n} < \frac{1}{n} \leq \frac{n}{n}$$

Teorema 1.1.9(c)

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Hal ini berarti $\frac{1}{n} \leq 1$ dan $\frac{1}{n} > 0, \forall \frac{1}{n} \in S_3$

Ambil $\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_3$

$\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_3$ berarti 1 adalah batas atas dari S_3

Definisi 1.3.1(a)

Misalkan $\epsilon > 0$, maka $-1 + \epsilon > -1 + 0$

Teorema 1.1.9(b)

$$\Leftrightarrow (-1)(-1 + \epsilon) < (-1)(-1)$$

Teorema 1.1.9(d) dan A3

$$\Leftrightarrow 1 - \epsilon < 1$$

Teorema 1.1.3(a)(c)

$$= \frac{1}{1} = s_\epsilon \in S_3$$

Jadi, $\exists s_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$, sehingga $1 - \epsilon < s_\epsilon$

1 adalah batas atas dari S_3 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists s_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3 \ni 1 - \epsilon < s_\epsilon$, maka menurut Lemma 1.3.5 $\text{Sup } S_3 = 1$.

Jadi terbukti bahwa $\text{Sup } S_3 = 1$.

② Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah.

Buktikan bahwa $\text{Inf } S = -\text{Sup } \{-s : s \in S\}$

Jawab:

Diketahui: $S \neq \emptyset, S \subseteq \mathbb{R}$, ada u batas atas S

Akan dibuktikan: $\text{Inf } S = -\text{Sup } \{-s : s \in S\}$

Bukti:

Misalkan $v = \text{Inf } S$, maka $v = -\text{Sup } \{-s : s \in S\}$

$$\Leftrightarrow (-1)v = (-1)(-\text{Sup } \{-s : s \in S\})$$

Kesamaan

$$\Leftrightarrow -v = \text{Sup } \{-s : s \in S\}$$

Teorema 1.1.3(a)(c)

Misalkan $S' = \{-s : s \in S\}$, maka $-v = \text{Sup } S'$

$v = \text{Inf } S$, maka menurut definisi 1.3.2(b) v adalah batas bawah dari S , berarti

$$v \leq s, \forall s \in S$$

Definisi 1.3.1(b)

$\forall s \in S$
 $\Leftrightarrow s \geq v$
 $\Leftrightarrow (-1)s \leq (-1)v$ Teorema 1.1.9(c)
 $\Leftrightarrow -s \leq -v, \forall -s \in S'$ Teorema 1.1.3(a)

Berarti $-v$ adalah batas atas S'

Misal w sebarang batas atas S' , maka akan dibuktikan $-s \leq w, \forall -s \in S'$

$-s \leq w$

$\Leftrightarrow (-1)(-s) \geq (-1)w$ Teorema 1.1.9(d)
 $\Leftrightarrow s \geq -w, \forall s \in S$ Teorema 1.1.3(c)(a)

Berarti $-w$ batas bawah S .

$-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$, maka $-w \leq v$ Definisi 1.3.2(b)

$-w \leq v$

$\Leftrightarrow (-1)(-w) \geq (-1)v$ Teorema 1.1.9(d)
 $\Leftrightarrow w \geq -v$ Teorema 1.1.3(c)(a)
 $\Leftrightarrow -v \leq w$

Berarti $-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S' , maka

$-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$ Definisi 1.3.2(b)

Sehingga, $-v = \sup \{-s : s \in S\}$

$\Leftrightarrow (-1)(-v) = (-1)(\sup \{-s : s \in S\})$ Kesamaan
 $\Leftrightarrow v = -\sup \{-s : s \in S\}$ Teorema 1.1.3(c)(a)
 $\Leftrightarrow \inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jadi, terbukti bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

(3) Buktikan limit berikut ini :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+8} \right) = -\frac{7}{2}$

Jawab:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Akan dibuktikan : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Berdasarkan definisi 2.1.4, artinya

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq K \quad \dots (*)$$

Akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis pendahuluan

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| -\frac{4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$$



Dipindai dengan CamScanner

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{4}{\epsilon} > 0$, berdasarkan sifat archimedes $\exists K \in \mathbb{N} \ni K > \frac{4}{\epsilon}$ atau $\frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{4}$

Selanjutnya jika $n \geq K$, diperoleh $\frac{1}{n} < \frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{4}$, sehingga $\frac{4}{n} < \frac{4}{K} < \epsilon$

Akibatnya $\forall n \geq K$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} < \frac{4}{K} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq K$$

Oleh karena itu, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Akan dibuktikan: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$.

Berdasarkan definisi 2.1.4, artinya

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \epsilon, \forall n \geq K \quad \dots (*)$$

Akan ditunjukkan (*) berlaku.

Analisis pendahuluan.

$$\begin{aligned} \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| &= \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{(4-7n)(2) + (7)(2n+3)}{(2n+3)(2)} \right| \\ &= \left| \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right| \\ &= \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{29}{n} \end{aligned}$$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{29}{\epsilon} > 0$, berdasarkan sifat archimedes $\exists K \in \mathbb{N} \exists K > \frac{29}{\epsilon}$ atau $\frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{29}$.

Selanjutnya jika $n \geq K$, diperoleh $\frac{1}{n} < \frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{29}$, sehingga $\frac{29}{n} < \frac{29}{K} < \epsilon$.

Akibatnya $\forall n \geq K$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{29}{n} < \frac{29}{K} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \epsilon, \forall n \geq K$$

Oleh karena itu, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$.

Nama : Muhammad Faldi Raka Pangestu : Jekrana
 NIM : 180101090166
 Kelas : Pmtk A 2018
 Matakuliah : Analisis Real

Solusi UAS Analisa 1

- Misalkan $S_3 = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$
- Piberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$
- Buktikan limit berikut ini :
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-7n}{2n+5} \right) = -\frac{7}{2}$

Jawab:

- Akan dibuktikan $\sup S_3 = 1$
 - $1 > 0$ menurut teorema 2.1.8 b (buku bantle) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $n > 0$ menurut teorema 2.1.8 c (buku bantle).
 - $1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $0 < 1 \leq n$. Sehingga $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
 - * $\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_3$ berarti 1 adalah batas atas dari S_3 .
 Sekarang untuk setiap $\epsilon > 0$ kita tahu bahwa mungkin saja $1 - \epsilon < 0$ atau $0 < 1 - \epsilon < 1$.
 Misalkan $\epsilon > 0$, berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = S_1 \in S_3$.
 Jadi, $\exists s_1 = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \epsilon < s_1$
 1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists s_1 = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \epsilon < s_1$, maka menurut lemma 2.3.1 $\sup S_3 = 1$
 Lemma 2.3.1 (Buku Bantle)

- Jika S menjadi subset tak kosong dari \mathbb{R} yang terbatas ke bawah, Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Bukti

Misalkan $V = \inf S$ maka akan ditunjukkan $-V = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

$V = \inf S$, berarti i) V batas bawah S dan
 ii) Sebarang t batas bawah S bertakut $t \leq V$

i) V batas bawah S , berarti $V \leq s, \forall s \in S$
 Karena $-1 < 0$ maka $-s \leq -V, \forall -s \in S'$, berarti $-V$ batas atas S'
 Jadi $-V$ batas atas S' .
 Misalkan w sebarang batas atas S' , akan ditunjukkan $-V \leq w$
 w batas atas S' berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$
 Karena $-1 < 0$, maka $s \geq -w, \forall s \in S$. Sehingga $-w$ batas bawah S .
 $-w$ sebarang batas bawah S dan $V = \inf S$ maka $-w \leq V$
 Akibatnya $-V \leq w$.
 $-V$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S' bertakut $-V \leq w$.
 maka menurut definisi $-V = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$
 sehingga $V = -\sup \{-s : s \in S\}$
 Jadi $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$ Terbukti

$$3. a. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

$$\text{Artinya } \forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} \right| < \epsilon, \forall n \geq K$$

$$n < n+2, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ maka } \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n}$$

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2(n+2)}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$$

ambil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{4}{\epsilon} > 0$. Berdasarkan Sifat Archimedes

$$\exists K \in \mathbb{N} \ni K < \frac{4}{\epsilon} \text{ atau } \frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{4}, \text{ sehingga } \frac{4}{K} < \epsilon$$

$$\text{Selanjutnya jika } n \geq K \text{ maka } \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} \Leftrightarrow \frac{4}{n} \leq \frac{4}{K} < \epsilon$$

artinya, $\forall n \geq K$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{K} < \epsilon$$

$$\text{Jadi terbukti bahwa } \forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq K$$

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

bukti:

Kita harus menunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga kapanpun $n \geq K$ berlaku

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \epsilon$$

Diberikan $\epsilon > 0$, untuk memilih nilai K , sederhanakan bentuk nilai mutlak

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} \leq \frac{29}{4n} \leq \frac{29}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Misalkan $\frac{29}{n} < \epsilon$, maka nilai $n > \frac{29}{\epsilon}$. Kemudian pilih $K > \frac{29}{\epsilon}$, sehingga kapanpun

$$n \geq K \text{ berlaku } \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| \leq \frac{29}{n} < \frac{29}{K} < \epsilon$$

$$\text{Terbukti bahwa } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Nama : Muhammad Fauzan Mata Kuliah : Analisis Real
 NM : 180101040198 Dosen Pengampu : Juhani, M.Pd.
 Kelas : PMTK A 2018

1. Misalkan $S_3 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$

Jawab:

* akan ditunjukkan $\sup S_3 = 1$

$1 > 0 \rightarrow$ Teorema 1.1.10.b

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$ (Teorema 1.1.10.c)

$1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, maka $0 < 1 \leq n$

$0 < 1 \leq n$

$\frac{1}{n} \cdot 0 < \frac{1}{n} \cdot 1 \leq \frac{1}{n} \cdot n \rightarrow$ Teorema 1.1.9.c

$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \rightarrow M_1 \text{ dan } M_3$

maka $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$

* $\frac{1}{n} \leq 1 \forall \frac{1}{n} \in S_3 \Rightarrow 1$ adalah batas atas S_3

Untuk setiap $\epsilon > 0 \Rightarrow 1 - \epsilon$ atau $0 < \epsilon < 1$

Misalkan $\epsilon > 0$ berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \in S_3$

Jika $\exists \frac{1}{n} \in S_3$ sehingga $1 - \epsilon < \frac{1}{n}$

1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists \frac{1}{n} \in S_3$

$1 - \epsilon < \frac{1}{n} \in S_3$, maka $\sup S_3 = 1$ (Lemma 1.3.5)

2. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa
 $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jawab:

Diketahui : $S \neq \emptyset, S \subseteq \mathbb{R}$, ada u batas atas S

akan ditunjukkan $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

* Bukt

Misalkan $W = \inf S$, maka menurut definisi 1.3.2.b(a)

1) W adalah batas bawah S

2) Ada sebanyak t batas bawah S , maka $t \leq W$

akan ditunjukkan $-W = \sup \{-s : s \in S\}$

W adalah batas bawah dari S , berarti $W \leq s, \forall s \in S$ Definisi 1.3.2.b

• Karena $-1 < 0$, maka $-s < -W, \forall s \in S'$

berarti $-W$ adalah batas atas S'

Misal u sebanyak batas S' , akan ditunjukkan $-W \leq u$

u sebanyak batas atas S' , berarti $-s \leq u, \forall -s \in S'$

• Karena $-1 < 0$, maka $-s > -u, \forall s \in S'$

Sehingga $-u$ adalah batas bawah S'

$-u$ sebanyak batas bawah dari S' dan $W = \inf S$, maka

$-u < W$ (Definisi 1.3.2.b)

$-u < W$

$\Leftrightarrow (-1)u < W$

\rightarrow Teorema 1.1.3.a

$\Leftrightarrow (-1)(-1)u > (-1)W$

\rightarrow Teorema 1.1.3.d

$\Leftrightarrow ((-1)(-1))u > -W$

$\rightarrow M_2$ dan Teorema 1.1.3.a

$1 \cdot u > -W$

\rightarrow Teorema 1.1.3.c

$u > -W$

$\rightarrow M_3$

$-u \leq W$ sehingga $u \geq -W$ atau $-W \leq u$

Dengan itu, $-W$ batas atas S' dan u sebanyak batas atas S'

berarti $-W \leq u$, maka menurut definisi

$-W = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$

Sehingga $W = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jika, $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

3. Buktikan limit berikut ini :

$$a. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2 \quad b. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Jawab:

$$a. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

$$\text{Artinya } \forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} \right| < \epsilon, \forall n \geq K \quad (*)$$

akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis Pembuktian :

$$n < n+2, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ maka } \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$$

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$$

ambil Sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{4}{\epsilon} > 0$: Berdasarkan Sifat Archimedes

$$\exists K \in \mathbb{N} \exists K < \frac{4}{\epsilon} \text{ atau } \frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{4}, \text{ sehingga } \frac{4}{K} < \epsilon$$

$$\text{Selanjutnya jika } n \geq K \text{ maka } \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} \Leftrightarrow \frac{4}{n} \leq \frac{4}{K} < \epsilon$$

artinya $\forall n \geq K$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{K} < \epsilon$$

$$\text{Jadi terbukti bahwa } \forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq K$$

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right)$$

$$\text{Artinya } \forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| < \epsilon, \forall n \geq K \quad (*)$$

akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis Pembuktian :

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| = \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{2(4-7n) + 7(2n+3)}{2(2n+3)} \right| = \left| \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right|$$

$$= \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} = \frac{8}{n}$$

Anal Sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{8}{\epsilon} > 0$, berdasarkan sifat archimedes $\exists K \in \mathbb{N} \exists K > \frac{8}{\epsilon}$
 atau $\frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{8}$. Sehingga $\frac{8}{K} < \epsilon$

$$\text{Selanjutnya jika } n \geq K \text{ diperoleh } \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{8} \Rightarrow \frac{8}{n} \leq \frac{8}{K} < \epsilon$$

Artinya $\forall n \geq K$ berlaku

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} = \frac{8}{n} \leq \frac{8}{K} < \epsilon$$

$$\text{Jadi, terbukti bahwa } \forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| < \epsilon, \forall n \geq K$$

$$\text{Koreksi itu, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Dipindai dengan CamSc

Nama: Muhammad Murradha

NIM: 1601251903

MK: Analisis Real

Lokal: PMTK A 18

Final Test (UAS)

Sol.

1. Misal $S_2 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tunjukan bahwa $\sup S_2 = 1$

2. Diberikan S subset terhingga \mathbb{R} yang terbatas kebawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$.

3. Buktikan limit berikut ini:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Jawaban

1. pertama 2.1.8 bahwa $1 > 0$. Dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $n > 0$, $1 \in \mathbb{N}$, $n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.

Sehingga $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

• $\frac{1}{n} < 1, \forall \frac{1}{n} \in S$, artinya 1 adalah batas atas dari S_2 .

Untuk setiap $\epsilon > 0$ kita tahu bahwa mungkin $1 < \epsilon$ atau $0 < \epsilon < 1$.

Misal $\epsilon < 0$, artinya $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = S_2 \in S_2$.

Jadi $\exists S_2 = \frac{1}{1} \in S_2$, sehingga $1 - \epsilon < S_2$.

1 adalah batas atas S_2 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists S_2 = \frac{1}{1} \in S_2$ sehingga $1 - \epsilon < S_2$.
Maka menurut Lemma 2.3.4 $\sup S_2 = 1$.

• $\frac{1}{n} > 0, \forall \frac{1}{n} \in S_2$. Misal 0 bukan batas bawah dari S_2 , artinya $\exists s \in S_2$ sehingga $s < 0$. $s < 0$ artinya $s \notin S_2$.

3a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$, kita harus menunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga kapanpun $n \geq K$ berlaku $\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon$.

Diberikan sebarang $\epsilon > 0$, sebarangkan bentuk nilai mutlak.

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} \leq \frac{4}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Jika $\frac{4}{n} < \epsilon$, maka $n > \frac{4}{\epsilon}$. Pilih $K > \frac{4}{\epsilon}$, sehingga kapanpun $n \geq K$ berlaku

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| \leq \frac{4}{n} \leq \frac{4}{K} < \epsilon$$

terbukti bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

b. $\left| \frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon \Rightarrow$ Jandaan (d)

Ditukan $\epsilon > 0 \rightarrow$ nilai k sbb

$$\left| \frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{-5}{4n^2+6} = \frac{5}{4n^2+6} < \frac{5}{n^2} < \frac{5}{M}$$

Pilih $k > \frac{11}{\epsilon}$, untuk setiap $n \geq k$ akan berlaku

$$\left| \frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2} \right| < \frac{5}{n} < \frac{5}{k} < \epsilon \quad \text{terbukti bahwa } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{2n^2+3} \right) = \frac{1}{2}$$

2. Misal $\text{Inf } S = \inf S$ maka $\text{Inf } -S = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

$v = \text{Inf } S$, berarti (1) v batas bawah S

(2) Sebarang t batas bawah S berlaku $t \leq v$.

• v batas bawah S , berarti $v \leq s, \forall s \in S$

berarti $-1 < 0$ maka $-s \leq -v, \forall -s \in S'$, berarti $-v$ batas atas S' .

Jadi $-v$ batas atas S'

~~berarti $-v$ batas atas S'~~

Misalkan w sebarang batas atas S' atau $-v \leq w$.

sebagai batas atas S' berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$.

berarti $-1 < 0$ maka $s \geq -w, \forall s \in S$, sehingga $-w$ batas bawah S .

$-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \text{Inf } S$ maka $-w \leq v$.

Akhir $-v \leq w$.

$-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S' berlaku $-v \leq w$, maka terbukti

terbukti $-v = \text{Inf } S' = \sup \{-s : s \in S\}$

Sehingga $v = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jadi $\text{Inf } S = -\sup \{-s : s \in S\}$: terbukti

Nama : Nadia Mardhatillah
 NIM : 180101040069
 Mata kuliah : Analisis Real
 Lokal : PMTK A 2018

FINAL TEST

1). Misalkan $S_n = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ buktikan bahwa $\sup S_n = 1$

Jawab

$$S \neq \emptyset$$

$$1 > 0$$

Teorema 1.1.10 (b)

$n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$

Teorema 1.1.10 (c)

$$\Rightarrow n \geq 1 > 0$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)n \geq \left(\frac{1}{n}\right)1 > \left(\frac{1}{n}\right)0$$

Teorema 1.1.9 (c)

$$\frac{n}{n} \geq \frac{1}{n} > \frac{0}{n}$$

Definisi pembagian

$$1 \geq \frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Operasi pembagian

Akan dibuktikan : $\sup S_n = 1$

Ambil : $\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_n$

1 batas atas S_n

Definisi 1.3.1 (a)

Untuk setiap $\epsilon > 0$ kita tahu bahwa mungkin saja

$$1 - \epsilon \text{ atau } 0 < \epsilon < 1.$$

Misalkan : $\epsilon > 0$

$$1 - \epsilon < 1 \quad 1 \in S_n$$

$$1 - \epsilon < S_n$$

1 batas atas S_n

$$1 = \sup S_n$$

Lemma 1.3.5

2). Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jawab

$$S \neq \emptyset$$

$$S \in \mathbb{R}$$

u batas atas S

Misalkan : $v = \inf S$

$\rightarrow v$ batas bawah S

Definisi 1.3.2 (b)

$$v \leq s, \forall s \in S$$

Definisi 1.3.1 (b)

$$-v \geq -s, \forall -s \in S'$$

Teorema 1.1.9 (d)

$-v$ batas atas S'

Definisi 1.3.1 (a)

Jadi $-v$ batas atas S'

Misalkan : w = sebarang batas atas S'

$$-s \leq w, \forall -s \in S'$$

Definisi 1.3.1 (a)

$$-(-s) \geq -w$$

Teorema 1.1.9 (d)

$$s \geq -w, \forall s \in S$$

Teorema 1.1.3 (b)

$$-w \text{ batas bawah } S$$

Definisi 1.3.1 (b)

Ambil : $-w$ batas bawah S

$$v = \inf S$$

Sehingga

$$\rightarrow -w \leq v$$

Definisi 1.3.2 (b)

$$-(-w) \geq -v$$

Teorema 1.1.9 (d)

$$w \geq -v$$

Teorema 1.1.3 (b)

$$-v \text{ batas atas } S'$$

Definisi 1.3.1 (a)

Ambil : $-v$ batas atas S'

$$w \text{ sebarang batas atas } S'$$

Sehingga

$$\rightarrow -v \leq w$$

Definisi 1.3.2 (b)

maka $-v \leq w$

$$-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$$

Definisi 1.3.2 (a)

$$v = -\sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$$

$$\inf S = -\sup \{-s : s \in S\} \quad \underline{\text{Terbukti}}$$

3). Buktikan Limit berikut ini :

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Jawab

Atau ditunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq k(\epsilon)$ berlaku

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{2n - 2(n+2)}{n+2} \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} < \epsilon$$

Pambil sebarang $\epsilon > 0$, maka $\frac{4}{\epsilon} > 0$

Mengingat sifat Archimedes, terdapat $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga

$$\frac{4}{k(\epsilon)} < \epsilon.$$

Akibatnya untuk setiap $n \geq k(\epsilon)$ berlaku

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{k(\epsilon)} < \epsilon$$

Jadi, terbukti $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$.

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Jawab

Atau ditunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq k(\epsilon)$

$$\text{berlaku } \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \epsilon.$$

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{2(4-7n) + 7(2n+3)}{2(2n+3)} \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{8-14n + 14n + 21}{4n+6} \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} \leq \frac{29}{4n} \leq \frac{29}{n} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Misalkan } \frac{29}{n} < \epsilon, \text{ maka nilai } n > \frac{29}{\epsilon}.$$

Kemudian pilih $k(\epsilon) > \frac{29}{\epsilon}$, sehingga kapanpun $n \geq k(\epsilon)$ berlaku

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| \leq \frac{29}{n} \leq \frac{29}{k(\epsilon)} < \epsilon.$$

Jadi, terbukti $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$.

Nama : Alagiatun Nisa
 NIM : 130101040060
 Mat Kul : Analisis Real
 Lokal : PMTK A 18

1. Misalkan $S_2 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_2 = 1$

Bukti:

Akan dibuktikan $\sup S_2 = 1$

$1 > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0 \rightarrow$ (Teo. 1.1.10 (b))

$1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0$

$\Rightarrow 0 < 1 \leq n$ (Teo. 1.1.9 (F))

$\Rightarrow \frac{0}{n} < \frac{1}{n} \leq \frac{n}{n}$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_2$

$\Rightarrow 1$ batas atas S_2 (Def 1.3.1 (a))

Sekarang untuk setiap $\epsilon > 0$ kita tahu bahwa mungkin saja $1 - \epsilon$ atau $0 < \epsilon < 1$

Misalkan $\epsilon > 0$

berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = S_2 \in S_2$

Jadi $\exists S_2 = \frac{1}{1} \in S_2$ sehingga $1 - \epsilon < S_2$

1 adalah batas atas S_2 dan untuk setiap $\epsilon > 0$

$\exists S_2 = \frac{1}{1} \in S_2$

sehingga $1 - \epsilon < S_2$ (lemma 1.3.5)

Terbukti $\sup S_2 = 1$

2. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas kebawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Bukti:

Diket : $S \neq \emptyset, S \subseteq \mathbb{R}, v$ batas atas \mathbb{R}

Buktikan : $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Misalkan $v = \inf S$

maka adit $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

$v = \inf S$ berarti

i) v batas bawah S (Def 1.3.2 (b))

ii) sebarang t batas bawah S

maka menurut Def 1.3.2 (b) $t \leq v$

$\forall v$ batas bawah S

$v \leq s, \forall s \in S$ (Def 1.3.1 (b))

karena $-1 < 0$

maka $-s \leq -v, \forall -s \in S'$ atau $v \leq s$ (Teo 1.1.9 (a))
 $-v \geq -s$ atau $-s \leq -v$

berarti $-v$ batas atas S' (Def 1.3.1 (b))

Misalkan w sebarang batas atas S' adit $-v \leq w$

w batas atas S' (Def 1.3.1 (a))

$-s \leq w, \forall -s \in S'$

karena $-1 < 0$

maka $s \geq w, \forall s \in S$

sehingga $-w$ batas bawah S (Def 1.3.1 (b))

$v = \inf S$ (Def 1.3.2 (b))

maka $-w \leq v$ (Def 1.3.1 (b))

sehingga akibatnya $-v \leq w \Rightarrow$ Teo (1.1.9 (d))

$-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S'

berlaku Def 1.3.1 (a)

$-v \leq w$ (Def 1.3.2 (a))

$-v = \sup S'$

$= \sup \{-s : s \in S\}$

sehingga $v = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jadi $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Buktikan limit berikut ini:

$$a. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

penyelesaian

$$\text{Artinya } \forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq k \quad (*)$$

Akan ditunjukkan (*) berlaku,

perhatikan bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n + 4}{n+2} \right|$$

$$= \left| \frac{4}{n+2} \right| < \frac{4}{n} = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$$

Ambil sembarang $\epsilon > 0$, seperti pada ~~exercise~~ exercises for section 3.1 no 5 (c)

Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{4}{n+2} \right|$$

$$= \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{1}{k} < \epsilon$$

$$\text{Jadi terbukti bahwa } \forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon$$

$$\forall n \geq k$$

$$\text{Jadi terbukti } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Penyelesaian

$$\text{Artinya } \forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| < \epsilon, \forall n \geq k \quad (*)$$

Akan ditunjukkan (*) berlaku

• Analisis pendahuluan

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| = \left| \frac{8 - 14n + 14n + 21}{4n+6} \right|$$

$$= \left| \frac{29}{4n+6} \right| \leq \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} < \frac{8}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ambil sembarang $\epsilon > 0$, berdasarkan Akibat 1.4.6 diperoleh $k \in \mathbb{N}$ jadi $0 < \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{8}$

k_0 adalah bilangan terkecil \mathbb{N} , jadi $n \geq k_0$

$$\text{Sehingga } \frac{8}{n} < \epsilon$$

Jadi berlaku bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| < \frac{8}{n} \leq \frac{1}{k} < \epsilon$$

$$\text{Jadi terbukti bahwa } \forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{29}{4n+6} \right| < \epsilon$$

$$\forall n \geq k$$

$$\text{Jadi terbukti } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Nama : Nor Astika Murni
 NIM : 180101040084
 Mata Kuliah : Analisis Real
 Lokal : PMTK A 18
 Dosen Pengampu : Juhroni, M.Pd

1. Misalkan $S_2 = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ tunjukkan bahwa $\text{Sup } S_2 = 1$

Bukti

Akan dibuktikan $\text{Sup } S_2 = 1$

$1 > 0$

teorema 1.1.10 b

$\forall n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$

teorema 1.1.10 c

$1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ maka $0 < 1 \leq n$

sehingga, $0 < 1 \leq n$

$$\Leftrightarrow \frac{0}{n} < \frac{1}{n} \leq \frac{n}{n} \quad \text{teorema 1.1.9 c}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Hal ini berarti

$$\frac{1}{n} \leq 1 \text{ atau } \frac{1}{n} > 0, \forall \frac{1}{n} \in S_2$$

• $\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_2$ berarti 1 adalah batas atas dari S_2 definisi 1.3.1 a

$\forall \epsilon > 0$, berarti $1 - \epsilon$ atau $0 < \epsilon < 1$

Misalkan $\epsilon > 0$, berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = s_1 \in S_2$

Jadi $\exists s_1 = \frac{1}{1} \in S_2$ sehingga $1 - \epsilon < s_1$

1 adalah batas atas S_2 dan $\forall \epsilon > 0 \exists s_1 = \frac{1}{1} \in S_2$

Sehingga $1 - \epsilon < s_1$, maka menurut lemma 1.3.5 $\text{Sup } S_2 = 1$

• $\frac{1}{n} > 0, \forall \frac{1}{n} \in S_2$

Andaikan 0 bukan batas bawah dari S_2 , berarti $\exists s \in S_2$ sehingga $s < 0$.

Jika $s < 0$, maka $s \notin S_2$.

Hal ini kontradiksi dengan $s \in S_2$, sehingga pengandaian salah.

Jadi, 0 batas bawah dari S_2

2. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas kebawah.

Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Penyelesaian

Diketahui : $S \neq \emptyset$, $S \subseteq \mathbb{R}$, ada u batas atas S

Akan dibuktikan $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Bukti

Misalkan $v = \inf S$ maka akan dibuktikan bahwa

$$-v = -\sup \{-s : s \in S\}$$

$v = \inf S$, artinya i) v batas bawah S

ii) ada sebarang t batas bawah dari S , maka $t \leq v$

v batas bawah S , berarti $v \leq s, \forall s \in S$ (definisi 1.3.1 b)

karena $-1 < 0$, maka $-s \leq -v, \forall -s \in S'$ (teorema 1.1.9 d)

berarti $-v$ adalah batas atas S' .

Misalkan w sebarang batas atas S' , akan dibuktikan $-v \leq w$

w sebarang batas atas S' , berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$ (definisi 1.3.1 a)

karena $-1 < 0$, maka $s \geq -w, \forall s \in S$ (teorema 1.1.9 d)

sehingga $-w$ batas bawah S . (definisi 1.3.2 b)

$-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$, maka $-w \leq v$, maka $-w \leq v$

sesuai definisi 1.3.2 (b).

$$-w \leq v$$

$$\Leftrightarrow w(-w) \geq (-1)(v) \quad (\text{teorema 1.1.9 b})$$

$$\Leftrightarrow w \geq -v \quad (\text{teorema 1.1.3 b dan a})$$

$$\Leftrightarrow -v \leq w$$

dengan itu, $-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S'

berlaku $-v \leq w$, maka menurut definisi 1.3.2 a

$$-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$$

sehingga $v = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jadi $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

3. Buktikan limit berikut ini.

a) $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

b) $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Jawab

a) $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Penyelesaian

Akan dibuktikan ada $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Berdasarkan definisi 2.1.4 artinya

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq K \dots (*)$$

akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis pendahuluan

$$n < n+2, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ maka } \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$$

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| -\frac{4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{4}{\epsilon} > 0$. Berdasarkan sifat Archimedes $\exists K \in \mathbb{N} \exists K > \frac{4}{\epsilon}$ atau $\frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{4}$, sehingga $\frac{4}{K} < \epsilon$.

Selanjutnya, jika $n \geq K$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} \Leftrightarrow \frac{4}{n} \leq \frac{4}{K} < \epsilon$

Akibatnya $\forall n \geq K$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{K} < \epsilon$$

Jadi terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq K$
 Karena itu $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

b) $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Penyelesaian

Akan dibuktikan ada $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Berdasarkan definisi 2.1.4 artinya

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| < \epsilon, \forall n \geq K \dots (*)$$

Akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis pendahuluan

$$\begin{aligned} \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| &= \left| \frac{2(4-7n) + 7(2n+3)}{2(2n+3)} \right| \\ &= \left| \frac{8 - 14n + 14n + 21}{4n+6} \right| \end{aligned}$$

$$\therefore \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} = \frac{8}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{\epsilon}{8} > 0$, berdasarkan sifat archimedes $\exists k \in \mathbb{N} \ni k > \frac{8}{\epsilon}$ atau $\frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{8}$ selanjutnya jika $n \geq k$ diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{8}$

$$\text{sehingga } \frac{\epsilon}{8} \leq \frac{8}{k} < \epsilon$$

Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{4n+6} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} = \frac{8}{n} \leq \frac{8}{k} < \epsilon, \quad \forall n \geq k$$

Karena itu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Nama : Nur Hikmah Ramadani
 Nim : 180101040040
 Mata Kuliah : Analisis Real
 Lokal : PMTK - A 2018

1) Misalkan $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$

Jawab :

Akan dibuktikan $\sup S_3 = 1$

$1 > 0$ (Teorema 1.1.10.b)

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$ (Teorema 1.1.10.c)

$1 > 0$, $1 \in \mathbb{N}$, $n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, maka $0 < 1 \leq n$

$$0 < 1 \leq n$$

$$\frac{1}{n} \cdot 0 < \frac{1}{n} \cdot 1 \leq \frac{1}{n} \cdot n$$

Teorema 1.1.9.c

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

M_3 dan M_4

Sehingga $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{n} \leq 1 \forall \frac{1}{n} \in S_3 \Rightarrow 1$ adalah batas atas S_3

Untuk setiap $\varepsilon > 0 \Rightarrow 1 < \varepsilon$ atau $0 < \varepsilon < 1$

Misalkan $\varepsilon > 0$ berarti $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \in S_3$

Jadi $\exists s_3 = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \varepsilon < s_3$

1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\varepsilon > 0 \exists s_3 = \frac{1}{1} \in S_3$

$1 - \varepsilon < s_3$, maka $\sup S_3 = 1$ (Lemma 1.3.5)

2) Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yg terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

$$S = \{-s : s \in S\}$$

Jawab :

Diketahui :

$S \neq \emptyset$, $S \subseteq \mathbb{R}$, ada v batas atas S .

Akan dibuktikan :

$$\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$$

Bukti :

- Misalkan $v = \inf S$, maka akan dibuktikan $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$, $v = \inf S$,

artinya :

1.) v adalah batas bawah dari S

2.) ada sebarang t batas bawah dari S , maka $t \leq v$.

v adalah batas bawah dari S , berarti $v \leq s, \forall s \in S$ (Definisi 1.3.1.b)

• Karena $-1 < 0$, maka $-s \leq -v, \forall -s \in S'$ (Teorema 1.1.9. d)
 berarti $-v$ adalah batas atas S' ,
 Misal w sebarang batas atas S' , akan dibuktikan $-v \leq w$.
 w sebarang batas atas S' , berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$.

• Karena $-1 < 0$, maka $s > -w, \forall s \in S'$ (Teorema 1.1.9. d)
 Sehingga $-w$ batas bawah S .
 $-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$, maka $-w \leq v$ (Definisi 1.3.2. b)
 $-w \leq v$

$(-1) \cdot -w \geq (-1)v$	Teorema 1.1.9. b
$(-1)(-1 \cdot w) \geq -v$	Teorema 1.1.3. a
$(-1) \cdot (-1) w \geq -v$	Teorema 1.1.3. c
$1 \cdot w \geq -v$	identitas perkalian
$w \geq -v$	identitas perkalian

$-w \leq v$ sehingga $w \geq -v$ atau $-v \leq w$
 Dengan itu, $-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas
 S' berlaku $-v \leq w$, maka menurut definisi $-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$.
 Sehingga $v = -\sup \{-s : s \in S\}$.
 Jadi, $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

3.) Buktikan limit berikut ini :

a.) $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Jawab :

Artinya $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \varepsilon, n \geq k$ (*)

akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis pendahuluan

$n < n+2, \forall n \in \mathbb{N}$, maka $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$

$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$

ambil sebarang $\varepsilon > 0$, diperoleh $\frac{1}{\varepsilon} > 0$, Berdasarkan sifat Archimedes

$\exists k \in \mathbb{N} \ni k < \frac{4}{\varepsilon}$ atau $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{4}$, sehingga $\frac{4}{k} < \varepsilon$

Selanjutnya jika,

$n \geq k$, maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{4}{n} \leq \frac{4}{k} < \varepsilon$

Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} < \frac{4}{k} < \varepsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \varepsilon, \forall n \geq k$

b) $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Jawab

Berdasarkan definisi 2.1.9, artinya $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right|$

$$< \varepsilon, \forall n \geq k \quad (*)$$

akan ditunjukkan $(*)$ berlaku

Analisis pendahuluan

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| = \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{(4-7n)(2) + (7)(2n+3)}{(2n+3)(2)} \right|$$

$$= \left| \frac{8 - 14n + 14n + 21}{4n+6} \right|$$

$$= \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{29}{n}$$

ambil sebarang $\varepsilon > 0$, diperoleh $\frac{29}{\varepsilon} > 0$. Berdasarkan Axiom Archimedes

$$\exists k \in \mathbb{N} \ni k > \frac{29}{\varepsilon} \text{ atau } \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{29}$$

Selanjutnya jika $n \geq k$, diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{29}$, sehingga $\frac{29}{n} \leq \frac{29}{k} < \varepsilon$

Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| < \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{29}{n} < \frac{29}{k} < \varepsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| < \varepsilon, \forall n \geq k$

Karena itu, limit $\left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Ujian akhir Semester

Nama: Nurul Azkia
 NIM: 180101090053
 Mata kuliah: Analisis real
 Lokal: A 2018

1. Misalkan $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$

Jawab:

Akan dibuktikan $\sup S_3 = 1$

$1 > 0 \rightarrow$ Teorema 1.1.10.b

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$ (Teorema 1.1.10.c)

$1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, maka $0 < 1 \leq n < 1 \leq n$

$\frac{1}{n} \cdot 0 < \frac{1}{n} \cdot 1 \leq \frac{1}{n} \cdot n \rightarrow$ Teorema 1.1.9c

$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \rightarrow$ Identitas dan invers perkalian

Sehingga $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$.

$\frac{1}{n} \leq 1 \forall \frac{1}{n} \in S_3 \rightarrow 1$ adalah batas atas S_3

Untuk setiap $\epsilon > 0 \rightarrow 1 - \epsilon < 1$ atau $0 < \epsilon < 1$

Misalkan $\epsilon > 0$ berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = s_1 \in S_3$

Jadi $\exists s_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \epsilon < s_\epsilon$

1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists s_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$ $1 - \epsilon < s_\epsilon$
 maka $\sup S_3 = 1$ (Lemma 1.3.5)

2. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jawab:

Diketahui $S \neq \emptyset, S \subseteq \mathbb{R}$, ada u batas atas S akan dibuktikan:

$\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Bukti:

• Misalkan $v = \inf S$, maka akan dibuktikan $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

$v = \inf S$, artinya

1) v adalah batas bawah dari S

2) ada sebarang t batas bawah dari S , maka $t \leq v$

* v adalah batas bawah dari S , berarti $v \leq s, \forall s \in S$, berdasarkan definisi 1.3.1 b)

• Karena $-1 < 0$, maka $-s \leq -v, \forall -s \in S' \rightarrow$ Teorema 1.1.9d

berarti $-v$ adalah batas atas S'

Misal w sebarang batas atas S' , akan dibuktikan $-v \leq w$.

w sebarang batas atas S' , berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$

• Karena $-1 < 0$, maka $S > -w$, $\forall s \in S$ → Teorema 1.1.9d
 Sehingga $-w$ batas bawah S
 • $-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$, maka $-w \leq v$ → Identitas
 $-w \leq v$
 $(-1) \cdot w \geq (-1) v$ → Teorema 1.1.9b
 $(-1) \cdot (-w) \geq -v$ → Teorema 1.1.3a
 $((-1) \cdot (-1)) w \geq -v$ → Teorema 1.1.3c
 $1 \cdot w \geq -v$ → Identitas perkalian
 $w \geq -v$ → Identitas perkalian
 $-w \leq v$ sehingga $w \geq -v$ atau $-v \leq w$
 dengan itu $-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S' berlaku
 $-v \leq w$, maka menurut definisi $-v = \sup S' = \sup \{ -s : s \in S \}$
 Sehingga $v = -\sup \{ -s : s \in S \}$
 Jadi, $\inf S = -\sup \{ -s : s \in S \}$

3. Buktikan limit berikut ini.

a. $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

b. $\lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Jawab:

a) $\lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Artinya $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, n \geq k \dots (i)$

Akan ditunjukkan (i), berikut

Analisis pendahuluan
 $n < n+2, \forall n \in \mathbb{N}$, maka $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$

$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$

Ambil sembarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{4}{\epsilon} > 0$ berdasarkan Sifat Archimedes

$\exists k \in \mathbb{N} \exists k < \frac{4}{\epsilon}$ atau $\frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{4}$, sehingga $\frac{4}{k} < \epsilon$

Selanjutnya jika $n \geq k$, maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{4}{n} \leq \frac{4}{k} < \epsilon$

Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{k} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq k$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Artinya: $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \epsilon, n \geq k \dots (i)$

Akan ditunjukkan (i) berlaku

Analisis pendekatan

$$\begin{aligned} \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| &= \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{(4-7n)(2) + (7)(2n+3)}{(2n+3)(2)} \right| \\ &= \left| \frac{8-14n+14n+21}{4n+6} \right| \\ &= \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{29}{n} \end{aligned}$$

Ambil sembarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{29}{\epsilon} > 0$, berdasarkan sifat

Archimedes $\exists k \in \mathbb{N} \ni k > \frac{29}{\epsilon}$ atau $\frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{29}$

Selanjutnya jika $n \geq k$, diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{29}$, sehingga

$$\frac{29}{n} \leq \frac{29}{k} < \epsilon$$

Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{29}{n} \leq \frac{29}{k} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \epsilon, \forall n \geq k$

Nama: Nurfitri Oktalina Darmayanti

NIM: 180101090073

Mata Kuliah: Analisis Real

Local: PMTK A 2018

1.) Misalkan $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$

Bukti:

Akan dibuktikan $\sup S_3 = 1$

$1 > 0$ menurut Teorema 2.1.8 b

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $n > 0$ menurut Teorema 2.1.8 c

$1 > 0$, $1 \in \mathbb{N}$, $n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $0 < 1 \leq n$.

sehingga $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_3$ berarti 1 adalah batas atas dari S_3 .

sekarang untuk setiap $\epsilon > 0$ kita tahu bahwa mungkin saja $1 - \epsilon$ atau $0 < \epsilon < 1$.

Misalkan $\epsilon > 0$ berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{n} \in S_3$.

Jadi $\exists s_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \epsilon < s_\epsilon$.

1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists s_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$

sehingga $1 - \epsilon < s_\epsilon$, maka menurut lemma 2.3.4 $\sup S_3 = 1$

2.) Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Bukti:

* $S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \emptyset$, misalkan u batas atas S akan ditunjukkan $u = \sup S$

Misalkan $\epsilon > 0$, maka $u - \epsilon < u = s_\epsilon \in S$

Karena $\exists s_\epsilon = u \in S$ sehingga $u - \epsilon < s_\epsilon$ maka menurut

lemma 2.3.4 $u = \sup S$.

atau

* $S \neq \emptyset, S \subseteq \mathbb{R}, u$ batas atas S

Misalkan $v = \inf \{-s : s \in S\}$ akan ditunjukkan $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

$v = \inf S'$, berarti

i) v batas bawah S' , berarti $-v \leq s, \forall s \in S'$

Karena $-1 < 0$ maka $-s \leq -v \forall -s \in S'$ berarti

$-v$ batas atas S

Misalkan w sebarang batas atas S' akan ditunjukkan $-v \leq w$

w batas atas S' berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$

Karena $-1 < 0$, maka $s \geq -w, \forall s \in S$ sehingga

$-w$ batas bawah S

$-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S'$



maka $-w \leq v$

Atkalog: $-v \leq w$

$-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S'

bertaku $-v \leq w$

maka menurut definisi $-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$

Jadi, $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

3.) Buktikan limit berikut ini:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Bukti:

Atan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $K(\epsilon) \in \mathbb{N}$

sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq K(\epsilon)$ berlaku $\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon$.

Dibambil sebarang $\epsilon > 0$

Pilih $K(\epsilon) \in \mathbb{N} \ni \frac{1}{K(\epsilon)} < \frac{\epsilon}{4}$

$\forall n \geq K(\epsilon)$ memenuhi

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{1}{K(\epsilon)} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Bukti:

Kita harus menunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga

kapapun $n \geq K$ berlaku $\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| < \epsilon$.

Diberikan $\epsilon > 0$, untuk memilih nilai K , sederhanakan bentuk nilai mutlak

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} \leq \frac{29}{4n} \leq \frac{29}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Misalkan $\frac{29}{n} < \epsilon$, maka nilai $n > \frac{29}{\epsilon}$. Kemudian pilih $K > \frac{29}{\epsilon}$, sehingga kapapun

$$n \geq K \text{ berlaku } \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| \leq \frac{29}{n} \leq \frac{29}{K} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Nama : Nurul Hikmah Amaliah
 Nim : 180101040054
 Mata kuliah : Analisis Real
 Lokal : A 2018

final

14/20.
/05

1). Misalkan $S_3 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$.

Jawab:

Bukti:

akan dibuktikan $\sup S_3 = 1$

$1 > 0$ menurut teorema 2.1.8 (b).

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $n > 0$ menurut teorema 2.1.8 (c)

$0 > 1$, $1 \in \mathbb{N}$, $n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

Maka $0 < 1 \leq n$ sehingga $0 < \frac{1}{n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

* $\frac{1}{n} \leq 1 \forall \frac{1}{n} \in S_3$, berarti 1 adalah batas atas dari S_3 .

sekarang untuk setiap $\epsilon > 0$ kita tahu bahwa mungkin saja $1 < \epsilon$ atau $0 < \epsilon < 1$.

Misalkan $\epsilon > 0$, berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = s_1 \in S_3$.

Jadi, $\exists s_1 = \frac{1}{1} \in S_3$, sehingga $1 - \epsilon < s_1$.

1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists s_1 = \frac{1}{1} \in S_3$,

sehingga $1 - \epsilon < s_1$, maka menurut lemma 2.3.4 $\sup S_3 = 1$.

2). Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah.

Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$.

Jawab:

Bukti:

$S \neq \emptyset$, $s \in \mathbb{R}$, u batas atas S

Misalkan $v = \inf S$ maka adit $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

$v = \inf S$, berarti,

i). v batas bawah S , berarti $v \leq s, \forall s \in S$

karena $-1 < 0$ maka $-s \leq -v, \forall -s \in S'$, berarti $-v$ batas atas S' .

Jadi, $-v$ batas atas S' .

Misalkan w sebarang batas atas S' , adit $-v \leq w$

w batas atas S' berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$.

karena $-1 < 0$, maka $s \geq -w, \forall s \in S$, sehingga

$-w$ batas bawah S .

$-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$.

Maka $-w \leq v$, akibatnya $-v \leq w$

$-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S'

berlaku $-v \leq w$.

Maka menurut definisi $-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$

Jadi, $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$.

3). Buktikan limit berikut ini :

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Jawab:

Bukti:

akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$, sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq k(\epsilon)$ berlaku $\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon$.

Diambil sebarang $\epsilon > 0$

pilih $k(\epsilon) \in \mathbb{N} \ni \frac{1}{k(\epsilon)} < \frac{\epsilon}{4}$

$\forall n \geq k(\epsilon)$ memenuhi

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} < \frac{1}{k(\epsilon)} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$.

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Jawab:

Bukti:

akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga $n \geq k$ berlaku $\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| < \epsilon$.

Diberikan $\epsilon > 0$, untuk memilih nilai k , sederhanakan bentuk nilai mutlak. $\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} \leq \frac{29}{4n} \leq \frac{29}{n}$,

$n \in \mathbb{N}$.

Misalkan $\frac{29}{n} < \epsilon$, maka nilai $n > \frac{29}{\epsilon}$. kemudian pilih $k > \frac{29}{\epsilon}$,

sehingga kapanpun $n \geq k$ berlaku

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| \leq \frac{29}{n} \leq \frac{29}{k} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$.

Nama : Rahmi Maulida
 NIM : 180101040063
 Mata kuliah : Analisis Real
 Lokasi : PMTK A 2018

1. Misalkan $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$

Jawab:

Diketahui $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Akan dibuktikan $\sup S_3 = 1$

$1 > 0$ (Teorema 1.1.10 (b))

$\forall n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$ (Teorema 1.1.10 (c)) $\therefore \therefore$

$1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ maka $0 < 1 \leq n$

Sehingga, $0 < 1 \leq n$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{n}{n} \quad (\text{Teorema 1.1.9 (c)})$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Hal ini berarti $\frac{1}{n} \leq 1$ atau $\frac{1}{n} > 0, \forall \frac{1}{n} \in S_3$

$\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_3$ berarti 1 adalah batas atas dari S_3 (Definisi 1.3.1 (a))

$\forall \epsilon > 0, 1 < \epsilon$ atau $0 < \epsilon < 1$

Misalkan $\epsilon > 0$, berarti $1 - \epsilon < 1 = \frac{1}{1} = S_1 \in S_3$

Jadi, $\exists S_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \epsilon < S_\epsilon$

1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\epsilon > 0 \exists S_\epsilon = \frac{1}{1} \in S_3$

Sehingga $1 - \epsilon < S_\epsilon$, maka menurut lemma 1.3.5, $\sup S_3 = 1$

2. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa

$$\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$$

Jawab:

Diketahui: $S \neq \emptyset, S \subseteq \mathbb{R}$, ada u batas atas S

Akan dibuktikan $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Bukti:

Misalkan $v = \inf S$, maka akan dibuktikan $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

$v = \inf S$, berarti

1) v adalah batas bawah dari S

2) Ada sebarang t batas bawah dari S , maka $t \leq v$

• v adalah batas bawah dari S , berarti $v \leq s, \forall s \in S$ (Definisi 1.3.1 (b))

• Karena $-1 < 0$, maka $-s \leq -v, \forall -s \in S'$ (Teorema 1.1.9 (d))

berarti $-v$ adalah batas atas S'

misal w sebarang batas atas S' , akan dibuktikan $-v \leq w$
 w sebarang batas atas S' , berarti $-z \leq w, \forall -z \in S'$
 • Karena $-1 < 0$, maka $z \geq -w, \forall z \in S$ (Teorema 1.1.9 (d))
 sehingga $-w$ batas bawah S
 • $-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$, maka $-w \leq v$ (Definisi 1.3.2 (b))
 $-w \leq v$
 $(-1) \cdot -w \geq (-1) \cdot v$ (Teorema 1.1.9 (d))
 $(-1)(-w) \geq -v \therefore \therefore$ (Teorema 1.1.3 (a))
 $(-1)(-1) w \geq -v$ M2
 $1 \cdot w \geq -v$ (Teorema 1.1.3 (c))
 $w \geq -v$ M3
 $-w \leq v$ sehingga $w \geq -v$ atau $-v \leq w$
 Dengan itu, $-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S' berarti $-v \leq w$,
 maka menurut definisi $-v = \sup S' = \sup \{-z : z \in S\}$
 Sehingga $v = -\sup \{-z : z \in S\}$
 Jadi, $\inf S = -\sup \{-z : z \in S\}$ (Terbukti)

3. Buktikan limit berikut ini
 a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$
 b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = \frac{7}{2}$
 Jawab:
 a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$
 Akan dibuktikan $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$
 Artinya,
 $\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq K \dots (*)$
 Akan ditunjukkan (*) berikut,
 Analisis pendahuluan
 $\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$
 Ambil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{\epsilon}{4} > 0$, berdasarkan sifat Archimedes
 $\exists K \in \mathbb{N} \exists K > \frac{4}{\epsilon}$ atau $\frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{4}$. Selanjutnya jika $n \geq K$ diperoleh
 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{4}$ sehingga $\frac{4}{n} \leq \frac{4}{K} < \epsilon$

Akibatnya $\forall n \geq K$ berlaku bahwa
 $\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{K} < \epsilon$
 Jadi, terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \exists \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq K$
 Oleh karena itu $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Nama : Siti Mukhabiyatun
 NIM : 110101090073
 Kelas/Matakul : kelas A / Analisis Real
 Dosen Pengampu : Juhrani, M.Pd

1. Misalkan $S_2 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_2 = 1$.

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan $\sup S_2 = 1$.

$1 > 0$ Menurut Teorema 2.1.2 (b) Bartle
 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $n > 0$
 Menurut Teorema 2.1.2 (c) Bartle $1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0$
 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $0 < 1/n \leq n$, sehingga $0 < 1/n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
 \Rightarrow untuk $1/n \leq 1, \forall 1/n \in S_2$
 Berarti 1 adalah batas atas dari S_2
 \Rightarrow Selanjutnya untuk setiap $\varepsilon > 0$ kita tahu bahwa diandaikan
 $1 - \varepsilon < 1$ atau $0 < \varepsilon < 1$
 Misalkan $\varepsilon > 0$ berarti $1 - \varepsilon < 1 = \frac{1}{1} = S_1 \in S_2$.
 Jadi, $\exists S_\varepsilon = \frac{1}{1} \in S_2$ sehingga $1 - \varepsilon < S_\varepsilon$
 $\Rightarrow 1$ adalah batas atas S_2 dan untuk setiap $\varepsilon > 0 \exists S_\varepsilon = \frac{1}{1} \in S_2$
 sehingga $1 - \varepsilon < S_\varepsilon$, maka menurut lemma 2.3.4 Bartle
 $\sup S_2 = 1$ (terbukti)

2. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah.
 Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{ -s : s \in S \}$

Penyelesaian

Misalkan $v = \inf S$ maka akan ditunjukkan $-v = \sup \{ -s : s \in S \}$
 $= \sup S'$.

$\Rightarrow v = \inf S$
 berarti (i) v batas s
 (ii) sebarang t batas bawah s berlaku $t \leq v$.

Maka

(i) v batas s , berarti $v \leq s, \forall s \in S$
 karena $-1 < 0$ maka $-s \leq -v, \forall -s \in S'$
 berarti $-v$ batas atas S'

(ii) Misalkan w sebarang batas atas S' akan ditunjukkan
 $-v \leq w$ dengan w batas atas S' berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$
 Karena $-1 < 0$, maka $s \geq -w, \forall s \in S$,
 sehingga $-w$ batas bawah s .
 $-w$ sebarang batas bawah s dan $v = \inf S$

maka $-w \leq v$

Akibatnya $-v \leq w$.

$-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S'
bertaku $-v \leq w$ maka menurut definisi 1.3.2 (a)

$$-v = \sup S' = \sup \{ -s : s \in S \}$$

$$\text{sehingga } v = -\sup \{ -s : s \in S \}$$

Jadi, terbukti $\inf S = -\sup \{ -s : s \in S \}$

3. Buktikan limit berikut ini

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Penyelesaian :

Akan dibuktikan $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

Artinya $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq k$ (*)

Akan ditunjukkan (*)

Analisis Pendahuluan

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n}{n+2} - \frac{2(n+2)}{n+2} \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right|$$

$$= \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{1}{k} < \epsilon$$

Jika diambil sebarang $\epsilon > 0$ maka $k(\epsilon) = \frac{4}{\epsilon}$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq k$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Penyelesaian :

Akan dibuktikan $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Artinya $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| < \epsilon, \forall n \geq k$ (*)

Akan ditunjukkan (*)

Analisis Pendahuluan

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| = \left| \frac{20}{4n+6} \right| = \frac{20}{4n+6} \leq \frac{20}{4n+6} \leq \frac{20}{4n} \leq \frac{20}{4} = \frac{5}{n}, n \in \mathbb{N}$$

Misalkan $\frac{20}{n} < \epsilon$ maka nilai $n > \frac{20}{\epsilon}$, kemudian $k > \frac{20}{\epsilon}$

sehingga

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| \leq \frac{20}{n} \leq \frac{20}{k} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \ni \left| \frac{4-7n}{2n+3} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| < \epsilon, \forall n \geq k$

Nama : Siti Rahimah Dwi Ninasth
 NIM : 180101040065
 Mata Kuliah : UAS Analisis Real
 Lokal : PMTE A 2018

① Misalkan $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$

Bukti :

- Akan dibuktikan $\sup S_3 = 1$
 $1 > 0$ menurut teorema 1.1.10 (b)
 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $n > 0$ menurut teorema 1.1.10 (c)
 $1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $0 < 1 \leq n$.

Sehingga $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

- $\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_3$, berarti 1 adalah batas atas dari S_3 .

Seorang untuk setiap $\varepsilon > 0$, kita tahu bahwa mungkin saja $1 < \varepsilon$ atau $0 < \varepsilon < 1$.

Misalkan $\varepsilon > 0$, berarti $1 - \varepsilon < 1 = \frac{1}{1} = s_1 \in S_3$.

Jadi $\exists s_\varepsilon = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \varepsilon < s_\varepsilon$

1 adalah batas atas S_3 dan untuk setiap $\varepsilon > 0 \exists s_\varepsilon = \frac{1}{1} \in S_3$.

Sehingga $1 - \varepsilon < s_\varepsilon$, maka menurut lemma 1.3.5 $\sup S_3 = 1$.

- $\frac{1}{n} > 0, \forall \frac{1}{n} \in S_3$.

Andaikan 0 bukan batas bawah dari S_3 , berarti $\exists s \in S_3$ sehingga $s < 0$.
 $s < 0$ berarti $s \notin S_3$.

Kontradiksi dengan $s \in S_3$.

Jadi pengandaian 0 bukan batas bawah dari S_3 salah.

Jadi 0 batas bawah dari S_3 .

② Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Jawab :

$S \neq \emptyset, s \in \mathbb{R}, u$ batas atas S .

Buktikan $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Bukti

Misalkan $v = \inf S$ maka akan ditunjukkan $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

$v = \inf S$, berarti

- v batas bawah S dan,
- Sebarang t batas bawah S berlaku $t \leq v$.

- v batas bawah S , berarti $v \leq s, \forall s \in S$.

Karena $-1 < 0$ maka $-s \leq -v, \forall -s \in S'$, berarti $-v$ batas atas S' .

Jadi $-v$ batas atas S' .

Misalkan w sebarang batas atas S' , akan ditunjukkan $-v \leq w$.

w batas atas S' berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$.

Karena $-1 < 0$, maka $s \geq -w, \forall s \in S$, sehingga $-w$ batas bawah S .

$-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$ maka $-w \leq v$.

Akibatnya $-v \leq w$.

$-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S' berlaku $-v \leq w$, maka menurut definisi $-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$ sehingga $v = -\sup \{-s : s \in S\}$.

Jadi $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

3) Buktikan limit berikut ini :

$$a. \lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

$$b. \lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Bukti :

$$a. \lim \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

$$\text{Artinya } \forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq k (*)$$

Akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis pendahuluan. Perhatikan bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n-2n-4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n}$$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, seperti contoh 2.1.7 (a). Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n-2n-4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{1}{k} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \epsilon, \forall n \geq k$.

$$b. \lim \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Jawab

Bukti :

$$\text{Artinya } \forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| < \epsilon, \forall n \geq k (*)$$

Akan ditunjukkan (*) berlaku

Analisis pendahuluan. Perhatikan bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{8-14n}{4n+6} + \frac{14n+21}{4n+6} \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| < 0 \text{ dan}$$

$$\frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} < \frac{8}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ambil sebarang $\epsilon > 0$, diperoleh $\frac{1}{\epsilon} > 0$, berdasarkan sifat archimedes $\exists k \in \mathbb{N} \Rightarrow k > \frac{1}{\epsilon}$ atau $\frac{1}{k} < \epsilon$. atau $0 < \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{8}$.

Selanjutnya jika $n \geq k$ diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{8}$ yang memenuhi $\frac{8}{n} < \epsilon$. Atau seperti contoh 2.1.7 (a).

Akibatnya $\forall n \geq k$ berlaku bahwa

$$\left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{8-14n}{4n+6} + \frac{14n+21}{4n+6} \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} < \frac{8}{n} \leq \frac{1}{k} < \epsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| < \epsilon, \forall n \geq k$.

Nama: Zahra' Tiara Rizwardyfa
 NIM : 180101040071 / PMTK - A 2018
 Mata Kuliah : Analisis Real
 Dosen Pengampu : Juhani, M.Pd.

1. Misalkan $S_3 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$.

Bukti:

Akan ditunjukkan $\sup S_3 = 1$.

$1 > 0$ (Barthe Teo 2.1.8 b)

$\forall n \in \mathbb{N}$, berlaku $n > 0$ (Barthe Teo 2.1.8 c)

$1 > 0, 1 \in \mathbb{N}, n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ maka $0 < 1 \leq n$,

sehingga $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

• $\frac{1}{n} \leq 1, \forall \frac{1}{n} \in S_3$ berarti 1 adalah batas atas dari S_3 .

$\forall \varepsilon > 0$ kita tau bahwa mungkin saja $1 < \varepsilon$ atau $0 < \varepsilon < 1$

Misalkan $\varepsilon > 0$, berarti $1 - \varepsilon < 1 = \frac{1}{1} = S_1 = S_3$

Jadi $\exists S_3 = \frac{1}{1} \in S_3$ sehingga $1 - \varepsilon < S_\varepsilon$

1 adalah batas atas S_3 dan $\forall \varepsilon > 0 \exists S_\varepsilon = \frac{1}{1} \in S_3$,

sehingga $1 - \varepsilon < S_\varepsilon$

maka $\sup S_3 = 1$ (Barthe Lemma 2-3-4)

2. Diberikan S subset tak kosong \mathbb{R} yang terbatas ke bawah. Buktikan bahwa $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Bukti:

$S \neq \emptyset, S \subseteq \mathbb{R}$, u batas atas S

Buktikan $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

Misalkan $v = \inf S$ maka $-v = \sup \{-s : s \in S\} = \sup S'$

$v = \inf S$, berarti: 1) v batas bawah S

2) Sebarang t batas bawah S berlaku $t \leq v$

untuk 1) v batas bawah S , berarti $\forall s \in S, \forall s \in S$

Karena $-1 < 0$ maka $-s \leq -v, \forall -s \in S'$, berarti $-v$ batas atas S' .

Jadi $-v$ batas atas S' .

Misalkan w sebarang batas atas S' , maka $-v \leq w$

w batas atas S' berarti $-s \leq w, \forall -s \in S'$.

Karena $-1 < 0$, maka $s \geq -w, \forall s \in S$, sehingga $-w$ batas bawah S .

$-w$ sebarang batas bawah S dan $v = \inf S$ maka $-w \leq v$.

Akibatnya $-v \leq w$

$-v$ batas atas S' dan w sebarang batas atas S' berlaku $-v \leq w$,

maka menurut definisi: $-v = \sup S' = \sup \{-s : s \in S\}$

Sehingga $v = -\sup \{-s : s \in S\}$. Jadi, $\inf S = -\sup \{-s : s \in S\}$

3. Buktikan limit berikut ini:

$$a. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Jawab:

$$a. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$$

Misal $n < n+2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, maka $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Diberikan $\varepsilon > 0$ (Corollary 2.4.5) terdapat $K_\varepsilon \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < \frac{1}{K_\varepsilon} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, didapat $\frac{1}{K_\varepsilon} < \varepsilon$.

Jika $n \geq K_\varepsilon$, maka $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K_\varepsilon}$, didapat $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K_\varepsilon} < \varepsilon$

dan karenanya $\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n-2n-4}{n+2} \right| = \left| \frac{-4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2} < \varepsilon$, $\forall n \geq K_\varepsilon$.

Jadi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+2} \right) = 2$

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$$

Misal $\frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} = \frac{8-14n}{4n+6} + \frac{14n+21}{4n+6} = \frac{29}{4n+6} < \varepsilon$.

dan $\frac{29}{4n+6} = \frac{29}{4n} < \frac{32}{4n} = \frac{8}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Diberikan $\varepsilon > 0$ (Corollary 2.4.5) terdapat $K \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < \frac{1}{K} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, didapat $\frac{8}{K} < \varepsilon$.

dan karenanya $\left| \frac{4-7n}{2n+3} + \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{29}{4n+6} \right| = \frac{29}{4n+6} < \frac{8}{n} < \varepsilon$.

Jadi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n}{2n+3} \right) = -\frac{7}{2}$

Lampiran VIII (Distribusi Kemampuan Literasi dan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi)

1. Distribusi Kemampuan Literasi Berdasarkan SPSS 22

Descriptive Statistics

	N	Range	Minimum	Maximum	Mean
Nilai_Kemampuan_Literasi_Mahasiswa	26	57	40	97	83.33

2. Distribusi Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi Berdasarkan SPSS 22

Descriptive Statistics

	N	Range	Minimum	Maximum	Mean
Nilai_Kemampuan_Berpikir_Tingkat_Tinggi	26	25	75	100	84.73

Lampiran IX (Uji Hipotesis)

1. Korelasi Product Moment Berdasarkan SPSS 22

Correlations

		Kemampuan Literasi	Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi
Kemampuan Literasi	Pearson Correlation	1	,047
	Sig. (2-tailed)		,818
	N	26	26
Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi	Pearson Correlation	,047	1
	Sig. (2-tailed)	,818	
	N	26	26

Dasar Pengambilan Keputusan :

Jika nilai Signifikansi $< 0,05$ maka berkorelasi

Jika nilai Signifikansi $> 0,05$ maka tidak berkorelasi

2. Korelasi Product Moment Manual

No	X	Y	X ²	y ²	XY
1	88,33	81,25	7802,189	6601,563	7176,813
2	61,66	81,25	3801,956	6601,563	5009,875
3	78,33	78,12	6135,589	6102,734	6119,14
4	96,66	81,25	9343,156	6601,563	7853,625
5	96,66	100	9343,156	10000	9666

6	76,66	78,12	5876,756	6102,734	5988,679
7	85	81,25	7225	6601,563	6906,25
8	81,66	81,25	6668,356	6601,563	6634,875
9	86,66	100	7509,956	10000	8666
10	95	96,87	9025	9383,797	9202,65
11	96,66	81,25	9343,156	6601,563	7853,625
12	96,66	81,25	9343,156	6601,563	7853,625
13	90	79,69	8100	6350,496	7172,1
14	85	90,62	7225	8211,984	7702,7
15	40	90,62	1600	8211,984	3624,8
16	90	81,25	8100	6601,563	7312,5
17	80	79,69	6400	6350,496	6375,2
18	85	100	7225	10000	8500
19	95	81,25	9025	6601,563	7718,75
20	95	81,25	9025	6601,563	7718,75
21	71,66	81,25	5135,156	6601,563	5822,375
22	86,66	75	7509,956	5625	6499,5
23	83,33	81,25	6943,889	6601,563	6770,563
24	73,33	81,25	5377,289	6601,563	5958,063
25	80	100	6400	10000	8000
26	71,66	78,12	5135,156	6102,734	5598,079
Jumlah	2166,58	2203,1	184618,9	188262,3	183704,5

Menentukan r_{hitung} dengan rumus :

$$r_{xy} = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{\{N \sum X^2 - (\sum X)^2\} \{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2\}}}$$

$$r_{xy} = \frac{26(183704,5) - (2166,58)(2203,1)}{\sqrt{\{26(184618,9) - (2166,58)^2\} \{26(188262,3) - (2203,1)^2\}}}$$

$$r_{xy} = \frac{4776318 - 4773192}{\sqrt{\{4800091 - 4694069\} \{4894819 - 4853650\}}}$$

$$r_{xy} = \frac{3125,525}{\sqrt{\{106021,7\} \{41169,5\}}}$$

$$r_{xy} = \frac{3125,525}{\sqrt{4364858734}}$$

$$r_{xy} = \frac{3125,525}{66067,08}$$

$$r_{xy} = 0,047308$$

Melalui perhitungan tersebut diperoleh hasil r_{XY} atau $r_{hitung} = 0,047308$ yang dibulatkan menjadi 0,05 dan $r_{tabel} = 0,3882$. Dari hasil perhitungan tersebut menunjukkan bahwa $r_{hitung} < r_{tabel}$, maka dapat disimpulkan bahwa hipotesis alternatif (H_1) ditolak, sehingga dapat dikatakan bahwa tidak terdapat hubungan antara kemampuan literasi dengan kemampuan berpikir tingkat tinggi mahasiswa dalam menyelesaikan soal mata kuliah analisis real pada prodi pendidikan matematika

Lampiran X (Sebaran Mata Kuliah Kurikulupm KKNi Tahun 2018)

Mata Kuliah Kurikulum KKNi Tahun 2018 Semester I

No	KODE MK	MATA KULIAH	SKS	PRASYARAT
1	UIN18001	Pancasila	2	
2	UIN18005	Bahasa Indonesia	2	
3	UIN18008	Pengantar Filsafat	2	
4	FTK18008	Ulumul Hadits	2	
5	FTK18009	Ulumul Qur'an	2	
6	PMK18101	Aljabar Matriks	2	
7	PMK18102	Geometri	2	
8	PMK18103	Kalkulus Diferensial	3	
9	PMK18104	Trigonometri	2	
10	UIN18006	Bahasa Inggris	0	
11	UIN18007	Bahasa Arab	0	
JUMLAH SKS TERSAJI			19	

Mata Kuliah Kurikulum KKNi Tahun 2018 Semester II

SEMESTER II

No	KODE MK	MATA KULIAH	SKS	PRASYARAT
1	UIN18003	Pengantar Studi Islam	2	
2	FTK18001	Psikologi Umum	2	
3	FTK18015	Filsafat Pendidikan	2	
4	PMK18205	Kalkulus Integral	3	Kalkulus Diferensial
5	PMK18206	Logika Matematika	2	
6	PMK18207	Media dan Teknologi Pembelajaran	2	
7	PMK18208	Strategi Pembelajaran Matematika	3	
8	PMK18209	Teori Himpunan	2	
9	PMK18210	Teori Peluang	2	
JUMLAH SKS TERSAJI			20	

Mata Kuliah Kurikulum KKNi Tahun 2018 Semester III

SEMESTER III

No	KODE MK	MATA KULIAH	SKS	PRASYARAT
1	UIN18002	Kewarganegaraan	2	
2	PMK18111	Aljabar Linier	3	Aljabar Matriks
3	PMK18112	Kalkulus Multivariabel	3	Kalkulus Integral
4	PMK18113	Komputer dan Pemrograman	3	
5	PMK18114	Pembelajaran Matematika Sekolah	3	
6	PMK18115	Statistika Dasar	3	
7	PMK18116	Telaah Kurikulum Matematika	3	
8	PMK18117	Teori Bilangan	2	
9	FTK18017	Sosiologi Pendidikan**	2	
10	FTK18020	Pendidikan Kewirausahaan**		
11	FTK18023	Keterampilan Keagamaan	0	
JUMLAH SKS TERSAJI			24	

Mata Kuliah Kurikulum KKNi Tahun 2018 Semester IV

SEMESTER IV

No	KODE MK	MATA KULIAH	SKS	PRASYARAT
No	UIN18004	IAD/IBD/ISD*	2	
2	FTK18005	Dasar-Dasar Administrasi Pendidikan	2	
3	FTK18006	Fiqh	2	
4	FTK18016	Profesi Keguruan	2	
5	PMK18218	Analisis Real	3	Kalkulus Multivariabel
6	PMK18219	Evaluasi Pembelajaran Matematika	2	
7	PMK18220	Geometri Analitik Datar	2	Geometri

8	PMK18221	Metode Numerik	3	Komputer & Pemrograman
9	PMK18222	Perencanaan Pembelajaran	3	
10	PMK18223	Persamaan Diferensial	3	Kalkulus Multivariabel
JUMLAH SKS TERSAJI			24	

Mata Kuliah Kurikulum KKNi Tahun 2018 Semester V

SEMESTER V

No	KODE MK	MATA KULIAH	SKS	PRASYARAT
1	FTK18002	Ilmu Pendidikan	2	
2	FTK18003	Psikologi Pendidikan	2	
3	FTK18004	Bimbingan Konseling	2	
4	FTK18007	Ushul Fiqh	2	
5	PMK18124	Bahasa Inggris untuk Matematika	2	
6	PMK18125	Geometri Analitik Ruang	2	Geometri Analitik Datar
7	PMK18126	Matematika Diskrit	2	Komputer & Pemrograman
8	PMK18127	Metodologi Penelitian Pendidikan Matematika	3	Statistika Dasar
9	PMK18128	Program Linier	3	Aljabar Linear
10	PMK18129	PPL I	2	
11	PMK18134	Matematika Ekonomi***	2	
12	PMK18135	Sejarah dan Filsafat Matematika ***		
JUMLAH SKS TERSAJI			24	

Mata Kuliah Kurikulum KKNi Tahun 2018 Semester VI

SEMESTER VI

No	KODE MK	MATA KULIAH	SKS	PRASYARAT
1	FTK18010	Hadits Tarbawi	2	
2	FTK18011	Tafsir Tarbawi	2	

3	FTK18012	Pendidikan Aqidah	2	
4	FTK18013	Pendidikan Akhlak	2	
5	FTK18014	Sejarah Peradaban Islam	2	
6	PMK18230	Masalah Nilai Awal dan Nilai Batas	3	Persamaan Diferensial
7	PMK18231	PPL II	2	PPL I
8	PMK18232	Statistika Matematika	3	Teori Peluang dan Stat. Dasar
9	PMK18233	Struktur Aljabar	3	Aljabar Linear dan Teori Bilangan
10	PMK18236	Matematika Keuangan***	2	Metodologi Penelitian Pend.Mat.
11	PMK18237	Seminar Matematika***		
JUMLAH SKS TERSAJI			23	

Mata Kuliah Kurikulum KKNi Tahun 2018 Semester VII

SEMESTER VII

No	KODE MK	MATA KULIAH	SKS	PRASYARAT
1	FTK18018	Islam dan Budaya Banjar**	2	
2	FTK18019	Ilmu Tajwid**	2	
3	FTK18021	Tahfizh Al-Qur'an (Juz Amma)**	2	
4	FTK18022	Kajian Arab Melayu**	2	
5	PMK18138	Fungsi Kompleks***	2	Analisis Real
6	PMK18139	Geometri Transformasi***	2	Geo Analitik Datar & Ruang
7	PMK18140	Persamaan Diferensial Parsial***	2	Persamaan Diferensial
8	PMK18141	Teori Graf ***	2	Matematika Diskrit
JUMLAH SKS TERSAJI			16	

Mata Kuliah Kurikulum KKNi Tahun 2018 Semester VIII

SEMESTER VIII

No	KODE MK	MATA KULIAH	SKS	PRASYARAT
1	UIN18009	KKN	4	
2	PMK18042	Skripsi	6	Metodologi Penelitian Pend. Mat.
JUMLAH SKS TERSAJI			10	

Lampiran XI



**KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI ANTASARI
FAKULTAS TARBİYAH DAN KEGURUAN
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA**

Jalan Jenderal Ahmad Yani KM. 4,5 Banjarmasin 70235
Telepon (0511) 3253939 Faksimile (0511) 3274492
Email: ftk.antasari@gmail.com Web: ftk.iain-antasari.ac.id

SURAT KETERANGAN SELESAI RISET

Nomor: B- 24 /Un.14/III.1.g/PP.00.9/09/2020

Yang bertanda tangan di bawah ini, Ketua Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Antasari Banjarmasin menerangkan bahwa:

Nama : Rizki Dwi Nor Setianingsih
NIM : 1601250827
Fakultas : Tarbiyah dan Keguruan
Jurusan : Pendidikan Matematika

adalah benar yang bersangkutan telah selesai melakukan penelitian/riset penyusunan skripsi pada Jurusan PMTK sejak bulan April 2020 – Juli 2020 dengan judul: "Korelasi Antara Kemampuan Literasi dengan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Mata Kuliah Analisis Real Pada Prodi Pendidikan Matematika".

Demikian agar diketahui dan dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.



Banjarmasin, 29 September 2020
Ketua Jurusan PMTK,

[Signature]
Analisa Fitria, S.Pd., M.Si.
NIP. 198103292006042017

RIWAYAT HIDUP

- 1 Nama : Rizki Dwi Nor Setianingsih
- 2 Tempat dan Tanggal Lahir : Batu Balian, 09 Juni 1998
- 3 Agama : Islam
- 4 Kebangsaan : Indonesia
- 5 Status Perkawinan : Belum Menikah
- 6 Alamat : Desa Batu Balian Kec. Simpang Empat
Kab. Banjar.
- 7 Pendidikan
 - TK : TK Budi Sungkai
 - SD : SDN Sungkai 1
 - SMP/MTs : MTsN 1 Binuang
 - SMA/MA : MAN 2 Rantau
- 8 Pengalaman Organisasi : LPPQ
- 9 Orang Tua
 - Ayah : Sundaji
 - Pekerjaan : Wiraswasta
 - Alamat : Desa Batu Balian Kec. Simpang Empat
Kab. Banjar.
 - Ibu : Rasminah
 - Pekerjaan : Wiraswasta
 - Alamat : Desa Batu Balian Kec. Simpang Empat

Kab. Banjar.

10 Saudara : 2 orang

11 Suami/isteri

Nama : -

Pekerjaan : -

Alamat : -

12 Anak : -

Banjarmasin, 04 September 2020,

Penulis,